Systèmes de coordonnées cartésiens

Rommel Nana Dutchou

Résumé

Cette théorie de la relativité établie toutes les conséquences mathématiques de l'hypothèse de l'indépendance de la vitesse dans le vide d'un rayonnement électromagnétique par rapport au mouvement de la source pour une description rationnelle des lois de la physique. Le phénomène de contraction des longueurs de Lorentz est présenté avec clarté. Par ailleurs, la dynamique proposée, qui est celle postulée en relativité restreinte, est conçue de sorte à faire abstraction de la notion de système de coordonnées inertiel et de rendre cohérent le modèle classique de l'électromagnétisme lorsque le principe de relativité, qui prédit l'équivalence des référentiels en translation uniforme pour l'énoncé des lois, est supposé exacte. En particulier, les équations quasi expérimentales de Maxwell sont remises en cause, la meilleure preuve de la théorie étant l'existence de la force électromagnétique qui est incompatible avec la conception non relativiste de la physique. La dernière section a pour but de présenter une théorie de l'orientation sur un espace vectoriel de dimension finie et un théorème de représentation de l'ensemble des produits scalaires qui peuvent y être définis.

1 Notion d'espace et de temps

L'expression des lois expérimentales de la physique par des formules mathématiques nécessite un minimun d'hypothèses (postulats 1, 2, 3, 7).

Postulat 1. *(Notion de référentiel)*
La simultanéité entre les phénomènes et l'immobilité des entités sont les concepts fondamentaux de la physique auxquels tout référentiel peut donner un sens. Un référentiel est défini par les entités qui y sont immobiles et relativement à un quelconque référentiel $\mathcal{R}$, tout autre référentiel $\mathcal{R}'$ est défini par le mouvement dans $\mathcal{R}$ des entités immobiles dans $\mathcal{R}'$.

Postulat 2. *(Définition)*
Un évènement est localisé par rapport à un quelconque référentiel en un certain point de l'espace et à une certaine date. Il peut s'y produire un phénomène physique.

Postulat 3. *(C'est une représentation suffisante)*
Relativement à un quelconque référentiel, la simultanéité entre les évènements définie une relation d'équivalence et l'ensemble des classes d'équivalence, qui est un ensemble ordonné, est identifiable à la droite réelle. L'espace physique, qui est identifiable à chacune de ces classes d'équivalence, est un espace affine réel de dimension trois.

Postulat 4. *(Il n'y a pas d'immobilité absolue)*
Il existe au moins une classe des référentiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres qui sont équivalents pour l'énoncé des lois.

Postulat 5. *(La nature est bien faite)*
Relativement à un quelconque référentiel, les lois de la physique sont invariantes par translation dans l'espace et dans le temps, et identiques dans toutes les directions de l'espace.

Postulat 6. *(Le continuum espace-temps)*
L'univers $\mathcal{U}$, ensemble de tous les évènements, est un espace topologique homéomorphe à $\mathbb{R}^4$. Un système de coordonnées spatio-temporelles est un homéomorphisme défini sur $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^4$.

Postulat 7. *(Notion de trajectoire)*
Si un ensemble d'évènements décrit dans un referentiel $\mathcal{R}$ une trajectoire, c'est à dire que les projections temporelles forment un intervalle ouvert de la droite réelle et à chacune d'elles est associé un point de l'espace à travers une fonction dérivable au second ordre, alors cet ensemble décrit une trajectoire dans tout autre referentiel $\mathcal{R}'$.

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ étant deux referentiels, mathématiquement, le postulat 3 permet de distinguer leurs variables temporelles (la simultanéité peut être une notion relative) et les directions de leurs espaces physiques. Par ailleurs, les postulats 1 et 3 permettent de mettre en évidence l'existence d'une application $\Phi(\mathcal{R}', \mathcal{R})$, définie sur $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ direction de l'espace physique de $\mathcal{R}$, qui associe à l'évènement a le vecteur vitesse dans $\mathcal{R}$ et en a d'un point matériel continûment immobile dans $\mathcal{R}'$. Enfin, il est évident que l'immobilité des entités est une notion relative à l'observateur et qu'un point de l'espace de $\mathcal{R}'$ est décrit dans $\mathcal{R}$ par une trajectoire.

2 Le mouvement de translation uniforme

Définition 2.1. *$\mathcal{R}'$ est en translation uniforme dans $\mathcal{R}$ si toutes les entités immobiles dans $\mathcal{R}'$ se déplace avec le même vecteur vitesse constant dans $\mathcal{R}$.*

Proposition 2.1. *Si $\mathcal{R}'$ est en translation uniforme dans $\mathcal{R}$ et si une entité se déplace avec un vecteur vitesse constant $\vec{u}$ dans $\mathcal{R}$, elle se déplace avec un vecteur vitesse constant $\vec{u}'$ dans $\mathcal{R}'$.*

Démonstration. Si M_i est un point matériel qui se déplace dans $\mathcal{R}$ avec un vecteur vitesse constant $\vec{u}$, on peut faire le choix d'un couple de réels $(t, \delta t)$ et noter $F(k)$ le point de l'espace où M_i est situé à la date $t + k\ \delta t$, $k \in \mathbb{N}$. Il existe alors un vecteur $\vec{l}$ tel que, $\forall\ k \in \mathbb{N}$,

$$\overrightarrow{F(k)F(k+1)} \ = \ \vec{u}\ \delta t \ = \ \vec{l}$$

L'évènement décrit dans $\mathcal{R}$ par $(t + k\ \delta t, F(k))$ est décrit dans $\mathcal{R}'$ par $(t'(k), F'(k))$ et le postulat 5 permet d'affirmer qu'il existe un vecteur $\vec{l'}$ et un réel $\delta t'$ tels que, $\forall\ k \in \mathbb{N}$,

$$\overrightarrow{F'(k)F'(k+1)} \ = \ \vec{l'} \ \ , \ \ t'(k) = t' + k\ \delta t'$$

Ainsi, M_i se déplace avec le vecteur vitesse constant $\vec{u}' = \dfrac{\vec{l'}}{\delta t'}$ dans $\mathcal{R}'$. □

Il résulte de cette proposition que la transformation des coordonnées d'espace et de temps entre deux referentiels en translation uniforme et munis chacun d'un repère cartésien d'espace est affine.

2.1 La transformation intuitive

Le referentiel $\mathcal{R}'$ munit du système de coordonnées cartésien (O', x', y', z') est en translation uniforme de vecteur vitesse $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ dans $\mathcal{R}$ munit de (O, x, y, z). On admet qu'une entité qui se déplace avec un vecteur vitesse constant $\vec{u}$ dans $\mathcal{R}$ se déplace avec un vecteur vitesse

constant $\vec{u}'$ dans $\mathcal{R}'$ qui est donné par la relation, les espaces physiques affines de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ ayant même direction,

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$$

Considérons un point matériel qui dans $\mathcal{R}$ passe de la position (t_a, x_a, y_a, z_a) à la position (t_b, x_b, y_b, z_b), $t_b > t_a$. Dans $\mathcal{R}'$, elle est passée de la position (t'_a, x'_a, y'_a, z'_a) à la position (t'_b, x'_b, y'_b, z'_b) et on peut écrire, si les axes des repères cartésiens coincident,

$$\frac{x'_b - x'_a}{t'_b - t'_a} = \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} - v_x \quad , \quad \frac{y'_b - y'_a}{t'_b - t'_a} = \frac{y_b - y_a}{t_b - t_a} - v_y \quad , \quad \frac{z'_b - z'_a}{t'_b - t'_a} = \frac{z_b - z_a}{t_b - t_a} - v_z$$

On admet que, quelques soient a et b, $t'_b - t'_a = t_b - t_a$. Il résulte les équations dites de Galilée

$$t' = t + k_t \quad , \quad x' = x - v_x t + k_x \quad , \quad y' = y - v_y t + k_y \quad , \quad z' = z - v_z t + k_z \quad , \quad (k_t, k_x, k_y, k_z) \in \mathbb{R}^4 \quad (1)$$

2.2 Incohérence du modèle classique de l'électromagnétisme

2.2.1 La force électromagnétique

$\mathcal{R}'$ est en translation uniforme de vecteur vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$. Si q_1 est une charge électrique immobile dans $\mathcal{R}'$ et situé en M', le champ qui lui est associé en un point N' et à la date t' est déterminé par la force $\vec{F}'(q_2, t')$ exercée sur une charge test q_2 qui s'y trouverai, et cette force est décrite par la deuxième loi de Newton. Si m est la masse de q_2, on peut écrire

$$\vec{F}'(q_2, t') = q_2 \vec{E}'(t', N') = m\ \vec{a}'(q_2, t') \quad , \quad \frac{\vec{E}'(t', N')}{\|\vec{E}'(t', N')\|} = \frac{\overrightarrow{M'N'}}{\|\overrightarrow{M'N'}\|} \quad (2)$$

Dans $\mathcal{R}$, le champ électromagnétique associé à q_1 en l'évènement (t, N), évènement décrit dans $\mathcal{R}'$ par (t', N'), est déterminé par la force de Lorentz $\vec{F}(q_2, t)$ exercée sur la charge test q_2. On peut écrire, $\vec{u}$ étant la fonction vitesse de q_2, $t = t'$,

$$\vec{F}(q_2, t) = q_2(\vec{E}(t, N) + \vec{u}(t) \wedge \vec{B}(t, N)) = m\ \vec{a}(q_2, t) \quad (3)$$

On peut déduire de la transformation de Galilée la relation $\vec{a}'(q_2, t') = \vec{a}(q_2, t)$ par conséquent, $\vec{F}'(q_2, t')$ et $\vec{F}(q_2, t)$ sont colinéaires (égaux si la masse de q_2 est invariable) et $\vec{E}(t, N) + \vec{u}(t) \wedge \vec{B}(t, N)$ doit être colinéaire à $\overrightarrow{M'N'}$, quelque soit la fonction $\vec{u}(t)$. C'est impossible parce que $\vec{B}(t, N)$ n'est pas nul : il est connu que les champs associés à des charges en équilibre sont de nature électrique (Coulomb), que ces charges en mouvement créent un champ magnétique (théorème d'Ampère), et on sait que $\dfrac{\vec{B}(t, N)}{\|\vec{B}(t, N)\|} = \dfrac{\vec{v} \wedge \overrightarrow{M'N'}}{\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{M'N'}\|}$ (loi de Biot et Savart).

2.2.2 La formule spéciale de Lorentz : suggestion théorique

On peut déduire des équations de Maxwell dans le vide la relation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = \vec{0}$$

Cette relation serait valable dans un referentiel inertiel $\mathcal{R}$ munit du repère cartésien (O, x, y, z) et dans tout autre referentiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme dans $\mathcal{R}$. Si le mouvement de $\mathcal{R}'$ s'effectue sur la droite (O, x) à vitesse $v_x = v$, les équations 1 qui définissent une transformation f

permettent d'établir, ψ étant un élément suffisament différentiable de $(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^4}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\psi(t,x,y,z)=\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\,\psi(f(t,x,y,z))\;,\;\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\psi(t,x,y,z)=\left(v^2\,\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-2v\,\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}\right)\psi(f(t,x,y,z))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\psi(t,x,y,z)=\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\,\psi(f(t,x,y,z))\quad,\quad\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\psi(t,x,y,z)=\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\,\psi(f(t,x,y,z))$$

Il vient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi=0\;\Leftrightarrow\;\left((1-\frac{v^2}{c^2})\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}+2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi\circ f=0$$

Si on définit la transformation g par les relations

$$t'=\gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)\quad,\quad x'=\gamma\,(x-vt)\quad,\quad y'=y\quad,\quad z'=z\quad,\quad\gamma=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

il vient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi=0\iff\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi\circ g=0$$

On ne peut considérer ψ comme une composante d'un champ de vecteur électrique dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ par conséquent l'interprétation de cette nouvelle transformation, si elle a un sens, est délicate.
Les équations de Maxwell dans le vide qui constituent avec l'expression de la force de Lorentz les lois basiques de la physique exprimées dans un repère cartésien d'espace, dérivées des lois expérimentales régissant les interactions électromagnétiques, unifient théoriquement le magnétisme et l'électricité (conformément aux lois de Faraday et de Biot et Savart), prédisent l'existence des ondes propageant ou pertubant les vecteurs champs et décrivent leur vitesse dans une quelconque direction comme étant indépendante du mouvement de la source. La théorie de la relativité restreinte d'Albert Einstein va supposer que la vitesse dans le vide d'un rayonnement électromagnétique, ondulatoire ou corpusculaire, est identique dans toutes les directions quelque soit le système de coordonnées cartésien qui l'observe (la théorie est restreinte parce que ces systèmes sont choisis dans une classe privilégiée de reférentiel en translation uniforme les uns par rapport aux autres, situation dans laquelle on dispose d'une formule de transformation). Cette constance est suggérée par le principe de relativité et les équations de Maxwell dans le vide, elle est suggérée par la formule spéciale de Lorentz qui est alors interprétée comme un changement des coordonnées d'espace et de temps, qui rend covariant les équations de Maxwell et qui peut être retrouvée (et généralisée) par des considérations géométriques si on confond les directions des espaces affines physiques en translation uniforme à travers des repères cartésien qu'on postule superposables.

2.2.3 La formule spéciale de Lorentz : la preuve par l'expérience

L'électromagnétisme Les champs associés à des charges statiques pour l'observateur sont de nature électrique et ceux associés à des charges en mouvement (uniforme) sont de nature électromagnétique. Contrairement à la transformation de Galilée qui est qualitativement incompatible avec la loi de Biot et Savart, la formule spéciale de Lorentz permet de mettre ce phénomène en évidence, de construire l'expression de la force électromagnétique de Lorentz, de prédire la loi empirique de Biot et Savart comme étant approximative et les équations quasi expérimentales

de Maxwell dans le vide que satisfont ces champs lorsqu'on énonce la deuxième loi de Newton, qu'on suppose que le champ électrique associé à une charge immobile est une pertubation crée en la charge à chaque instant qui se propage dans le vide suivant la loi de Coulomb et sous forme sphère dont le rayon croît à vitesse constante, et qu'on postule la relation fondamentale de dynamique appropriée.

L'expérience de Fizeau L'hypothèse d'Albert Einstein signifie que la loi de composition des vitesse admise pour la constrution de la transformation de Galilée n'est pas exacte, et plus précisément que le résultat de la mesure des intervalles d'espace et de temps qui séparent deux phénomènes est une fonction du reférentiel depuis lequel elle est effectuée, un reférentiel devant être défini par le postulat 1. Les expériences initiées par Fizeau, qui comparent la vitesse de la lumière dans un milieu immobile à cette même vitesse lorsque le milieu est en mouvement, établissent que la loi de composition des vitesses n'est pas triviale et valident la formule proposée par la transformation de Lorentz.

L'expérience de Michelson et Morley Si le principe de relativité n'est pas exacte, parce qu'elles sont expérimentalement satisfaisantes, les équations de Maxwell qui décrivent les relations entre les vecteurs champs électrique et magnétique en un quelconque point de l'espace ne seraient valables que dans un repère privilégié et la vitesse d'une onde électromagnétique pour un quelconque observateur (et nécessairement plus généralement les lois régissant ces interactions) devrait dépendre de son mouvement dans ce repère universel et par conséquent de la direction dans laquelle se propage l'onde. Parce qu'il est peu probable que ce repère soit lié à la surface de la terre qu'on sait en mouvement par rapport au soleil, les expériences initiées par Michelson et Morley devraient mettre en évidence une variation de cette vitesse qui est celle d'un rayon lumineux.

2.3 La transformation de Lorentz - Poincaré

Les espaces physiques des reférentiels considérés sont supposés euclidiens.

2.3.1 Définition

Le théorème de Gauss, qui est équivalent à la formule expérimentale de Coulomb (c'est l'unique champ radiale à divergence nulle), formule satisfaisante pour l'étude des propriétés des champs associés à des distributions particulières de charges en équilibre (c'est la relation fondamentale de l'électrostatique), peut être supposé exacte dans cette configuration. Ce théorème peut être supposé exacte pour une distribution de charges en translation uniforme du fait de sa parfaite cohérence avec les trois autres équations de Maxwell dont l'une est son équivalent qui exprime l'inexistence des charges magnétiques (c'est un postulat justifié par les relations qu'il permet d'établir), la seconde traduit sous forme locale la loi empirique de Faraday sur le phénomène d'induction électromagnétique (la variation au cours du temps du vecteur champ magnétique en un quelconque point de l'espace y crée un vecteur champ électrique de sorte que la variation du flux d'un champ de vecteurs magnétiques à travers une quelconque surface crée une circulation de vecteurs champ électrique sur son contour, responsable de la mise en mouvement des charges test qui constitueraient un circuit électrique), et la dernière est déduite du théorème d'Ampère, amélioré pour rendre compte du fait que la variation au cours du temps d'un vecteur champ électrique en un quelconque point de l'espace y crée un vecteur champ magnétique (conformément à la loi de Biot et Savart si le champ électrique considéré est associé à une charge isolée et nécessairement valable pour les champs associés à une quelconque distribution de charges en

raison du principe de superposition), et de sorte à rendre possible, dans un souci de continuité car on ne peut déterminer expérimentalement les vecteurs champ associés à une charge en un évènement où elle est présente (leur définition est presque absurde), l'écriture de l'équation de conservation de la charge électrique s'il peut lui être associé une densité volumique (la matière porteuse de la charge élémentaire interagirait alors avec elle même). Cette cohérence se traduit par le fait que l'équation de propagation des vecteurs champ électique, qui est l'annulation de leur d'Alembertien, est alors similaire à celle de propagation des vecteurs champ magnétiques qui leurs sont associés évènement par événement. Parce qu'elle est linéaire, on devrait pouvoir établir cette équation de propagation (et plus généralement celles de Maxwell) pour une charge isolée en translation uniforme puisque les vecteurs champ électrique et magnétique qui lui sont associés en un quelconque point de l'espace ne peuvent être constants au cours du temps (lois de Coulomb et de Biot et Savart), puisque le courant électrique provient du déplacement de la matière chargée, la charge électrique étant une propriété fondamentale de la matière (non nécessairement uniformément répartie en son sein car elle pourrait être localisée au centre d'une sphère creuse dans le referentiel où elle est immobile) qui lui permet de se mettre en mouvement lorsqu'elle est à proximité de ses semblables. Il est alors nécessaire de supposer que dans un quelconque referentiel, puisque c'est le cas pour une charge isolée en translation uniforme, le champ électrique associé à une charge immobile est une pertubation qui est crée en la charge à chaque instant et qui se propage dans le vide sous forme d'une sphère dont le rayon croît à vitesse constante. Cette hypothèse est d'autant plus naturelle qu'une interaction à distance et instantannée est difficilement concevable (la formule spéciale de Lorentz indique qu'elle n'est mathématiquement réalisable que dans un unique referentiel), la mise en mouvement d'une charge parfaitement localisée dans le circuit électrique où elle est contrainte de se déplacer ne pouvant induire au même instant une variation de son action sur différentes particules tests disposées dans l'espace. Il est par ailleurs connu que des charges en équilibre interagissent puisque les cheveux d'un individu porté à certain potentiel se repoussent plus ou moins intensément suivant la densité des charges et on ne saurait dire qu'elles rayonnent de l'énergie qui est un concept dont le sens reste à préciser.
Le referentiel $\mathcal{R}$ peut définir différents points immatériels d'une sphère électrique associée à une charge immobile en décrivant leurs trajectoires comme étant des rayons. Dans $\mathcal{R}'$ en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, puisque la transformation f des coordonnées d'espace et de temps entre ces referentiels est affine, les évènements isolés par $\mathcal{R}$ décrivent des points mobiles s'éloignant chacun à vitesse constante du lieu de sa création, leurs trajectoires sont rectilignes et ces vitesses sont identique en vertu de leur indépendance par rapport au mouvement de la source et de l'isotropie de l'espace. f doit transformer toute trajectoire rectiligne qui serait réalisée à la vitesse de propagation d'une sphère électrique en une trajectoire similaire, la valeur de cette vitesse dans chacun des referentiels étant fonction du choix des étalons des distances spatiales et temporelles.

2.3.2 Solution

Toute application affine f, $f(ct,x,y,z) = (c't',x',y',z')$, $(c,c') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, dont la différentielle F laisse invariant l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui annulent la pseudo-norme de Minkowski,

est telle que

$$F = \lambda\,\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathrm{M} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \beta_2 & \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma\beta_2^2}{\gamma+1} & \frac{\gamma\beta_3\beta_2}{\gamma+1} & \frac{\gamma\beta_4\beta_2}{\gamma+1} \\ \beta_3 & \frac{\gamma\beta_2\beta_3}{\gamma+1} & \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma\beta_3^2}{\gamma+1} & \frac{\gamma\beta_4\beta_3}{\gamma+1} \\ \beta_4 & \frac{\gamma\beta_2\beta_4}{\gamma+1} & \frac{\gamma\beta_3\beta_4}{\gamma+1} & \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma\beta_4^2}{\gamma+1} \end{pmatrix}$$

$(\lambda, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbb{R}^4$, $\lambda \neq 0$, $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta_2^2 - \beta_3^2 - \beta_4^2}$, M matrice scalaire et orthogonale.
D'après la structure de la pseudo-norme de Minkowski, ces transformations sont réalisées si chacun des reférentiels $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ et $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$ est muni d'un repère d'espace cartésien et orthonormé. $|\lambda|$ peut alors être interprétée comme un changement de l'étalon des longueurs lors du passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$, $\frac{\lambda}{|\lambda|}$ comme un changement de la convention de signe utilisée pour caractériser la succession des instants, $\frac{\lambda}{|\lambda|}M$ comme un changement de direction et d'orientation des axes de (O, x, y, z) par rapport à (O', x', y', z').

Repères d'espace superposables On suppose que $\mathcal{R}'$ se déplace dans $\mathcal{R}$ à la vitesse constante v suivant la droite (O, x). Il résulte alors des équations 25 les égalités

$$\beta_3 = \beta_4 = 0 \quad , \quad \beta_2 = -\frac{v}{c}$$

Un choix approprié (lorsque $M = I$) de (O', x', y', z') permet d'écrire, k_t, k_x, k_y et k_z étant des constantes,

$$t' = \frac{c}{c'}\,\lambda\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) + k_t\ ,\ x' = \lambda\gamma\,(x - vt) + k_x\ ,\ y' = \lambda y + k_y\ ,\ z' = \lambda z + k_z\ ,\ \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Il apparait que toute trajectoire ayant pour support la droite (O, x) dans $\mathcal{R}$ est une trajectoire ayant pour support la droite (O', x') dans $\mathcal{R}'$. De plus, a et b étant deux quelconques évènements, on a les relations

$$\begin{pmatrix} y'_b - y'_a \\ z'_b - z'_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ainsi, toute trajectoire ayant pour support une droite parallèle à (O', x') dans $\mathcal{R}'$ a pour support une droite parallèle à (O, x) dans $\mathcal{R}$. Par ailleurs, on peut déduire de l'expression de t' qu'un ensemble de phénomènes qui se produisent simultanément dans $\mathcal{R}$ sont simultanés dans $\mathcal{R}'$ si et seulement si ils se produisent d'après $\mathcal{R}$ sur un plan affine orthogonal à la droite (O, x). Le calcul donne

$$t = \frac{c'}{c}\,\frac{1}{\lambda}\gamma\left(t' + \frac{vx'}{cc'} - k_t - \frac{vk_x}{cc'}\right)$$

Il résulte de cette formule qu'un ensemble de phénomènes qui se produisent simultanément dans $\mathcal{R}'$ sont simultanés dans $\mathcal{R}$ si et seulement si ils se produisent d'après $\mathcal{R}'$ sur un plan affine orthogonal à la droite (O', x').

Contraction apparente des longueurs f étant affine, trois points matériels immobiles dans $\mathcal{R}'$ et disposés de sorte que l'un soit au milieu du segment de droite formé par les deux autres paraissent nécessairement dans la même configuration à chaque instant dans $\mathcal{R}$. Considérons alors deux phénomènes simultanés dans $\mathcal{R}'$ qui se produisent sur la droite (O', x') et aux points x'_a et x'_b. Il peut s'agir de la création de deux sphères électriques qui se rencontrent en $\frac{x'_a + x'_b}{2}$. Dans $\mathcal{R}$, ces phénomènes se produisent aux points x_a et x_b de la droite (O, x), aux dates t_a et t_b. x'_a, x'_b et $\frac{x'_a + x'_b}{2}$ sont des points mobiles se déplaçant à la vitesse v, à la date t_a le point x'_a est en x_a, x'_b en $\tilde{x}_b$, et $\frac{x'_a + x'_b}{2}$ en $\frac{x_a + \tilde{x}_b}{2}$, à la date t_b le point x'_a est en $\tilde{x}_a$, x'_b en x_b, et $\frac{x'_a + x'_b}{2}$ en $\frac{\tilde{x}_a + x_b}{2}$. On peut supposer que la graduation de la droite temporelle dans $\mathcal{R}$ est normale (si la date t_1 précède la date t_2 alors $t_1 < t_2$) et en permutant au besoin les lettres a et b qui désignent des événements, on peut supposer $x_a \leq x_b$. Alors $\min\{t_a, t_b\}$ est égal à t_a si $v \geq 0$, égal à t_b si $v \leq 0$, et les deux sphères électriques se rencontrent à une date $\hat{t}$ en

$$\frac{\tilde{x}_a + x_b}{2} + v(\hat{t} - t_b) = \frac{x_a + \tilde{x}_b}{2} + v(\hat{t} - t_a)$$

Il est évident qu'on peut écrire

$$x_b - \tilde{x}_a = \tilde{x}_b - x_a = (x_b - x_a) - v(t_b - t_a)$$

Ces relations restent exactent si a et b ne se produisent pas sur (O, x) et la contraction des longueurs de Lorentz, qui résulte de la perception instantanée d'une entité qui perdure car il y a réciprocité, est mise en évidence par la relation déduite de la transformation des coordonnées suivant (O', x')

$$x'_b - x'_a = \lambda\gamma(\tilde{x}_b - x_a)$$

Géométries distintes On suppose que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ utilisent le même étalon des distances spatiales. Un physicien $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{R}'$ construit un triangle isocèle $A'B'C'$ rectangle en B', et le dispose immobile de sorte que $[B'C']$ soit un segment de (O', x'). On note $B'C'$ la longueur du segment $[B'C']$ et $\hat{A}'$ l'angle intérieur au triangle défini par $[A'B']$ et $[A'C']$. Pour un physicien $\mathcal{P}$ de $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}'$ a construit un triangle ABC rectangle en B et se déplaçant à la vitesse constante v sur (O, x) où est disposé le segment $[B, C]$. On peut déduire des formules de transformation

$$AB = A'B' \quad , \quad BC = \frac{1}{\gamma}B'C' \quad , \quad AC = \sqrt{BC^2 + AB^2}$$

ABC ne peut être un triangle isocèle. $\mathcal{P}'$ dispose le triangle $A'B'C'$ immobile et de sorte que $[A'C']$ soit un segment de (O', x'). Si M' (resp. M) est le milieu de $[A'C']$ (resp. $[AC]$) dans $\mathcal{R}'$ (resp. $\mathcal{R}$), on peut déduire des formules de transformation

$$MB = M'B' \quad , \quad AC = \frac{1}{\gamma}A'C' \quad , \quad AB = BC = \sqrt{MB^2 + \frac{AC^2}{4}}$$

Le triangle isocèle ABC ne peut être rectangle du fait deux premières égalités. Ainsi, un repère orthonormale dans $\mathcal{R}'$ ne l'est pas nécessairement dans $\mathcal{R}$.
Deux systèmes de coordonnées appartiennent au même referentiel si toute entité immobile pour l'un l'est pour l'autre et l'analyse qui précède suggère la difinition suivante.

Définition 2.2. *Deux systèmes de coordonnées appartiennent au même referentiel si et seulement si ils attribuent, au choix des étalons de mesure près, les mêmes valeurs aux distances spatiales et temporelles séparant deux quelconques évènements.*

3 L'électromagnétisme

3.1 Relation fondamentale de la dynamique

3.1.1 Transformation du vecteur accélération

$\mathcal{R}(O,x,y,z)$ et $\mathcal{R}'(O',x',y',z')$ sont deux systèmes de coordonnées cartésiens de l'espace-temps, relatifs à des bases orthonormées $\mathcal{B}(\mathcal{R}) = (\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$ et $\mathcal{B}(\mathcal{R}') = (\vec{e}'_2,\vec{e}'_3,\vec{e}'_4)$, et tels que $\mathcal{R}'$ soit en translation uniforme de vecteur vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$, suivant la droite (O,x) qui est superposable à la droite (O',x'). On suppose que les graduations des droites temporelles sont normales, qu'ils utilisent le même étalon des distances spatiales et attribuent la même valeur à la vitesse de propagation d'une sphère électrique. Les formules de transformation s'écrivent

$$t' = \gamma_v\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) + k_t\ ,\ x' = \gamma_v\left(x - vt\right) + k_x\ ,\ y' = y + k_y\ ,\ z' = z + k_z\ ,\ \gamma_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Si M_j est un point matériel, il permet de définir le vecteur d'espace $\vec{r}_j(t) = \overrightarrow{OM_j}$ élément de $\mathcal{V}(\mathcal{R})$ et $\vec{r}'_j(t') = \overrightarrow{O'M_j}$ élément de $\mathcal{V}(\mathcal{R}')$. Si on note $\pi_{r,r'}$ la bijection linéaire qui à $\vec{e}'_i$ associe $\vec{e}_i$, $2 \leq i \leq 4$, $\vec{v}$ étant un quelconque élément de $\mathcal{V}(\mathcal{R})$, les droites (O,x) et (O',x') n'étant plus nécessairement superposables, $<,>$ étant le produit scalaire dont est muni $\mathcal{V}(\mathcal{R})$, $\vec{k} = k_x\vec{e}_2 + k_y\vec{e}_3 + k_z\vec{e}_4$, il vient

$$t'(t,\vec{r}_j(t)) = \gamma_v\left(t - \frac{<\vec{v},\vec{r}_j(t)>}{c^2}\right) + k_t\ ,\ \pi_{r,r'}\left(\vec{r}'_j(t,\vec{r}_j(t))\right) = \vec{r}_j(t) + \frac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}\frac{<\vec{v},\vec{r}_j(t)>}{c^2}\vec{v} - \gamma_v\vec{v}t + \vec{k}$$

$$\left(t'(t,\vec{r}_j(t)),\vec{r}'_j(t,\vec{r}_j(t))\right) = \mathcal{L}_{\vec{v}}\left(t,\vec{r}_j(t)\right))$$

Dans le but d'alléger l'écriture des formules, on omettra l'opérateur $\pi_{r,r'}$ qui doit être appliqué à tout élément de $\mathcal{V}(\mathcal{R}')$. En notant $\vec{u}_j(t) = \dfrac{d}{dt}\vec{r}_j(t)$, $\vec{u}'_j(t') = \dfrac{d}{dt'}\vec{r}'_j(t')$, il vient

$$\vec{u}'_j = \gamma_v^{-1}\left(1 - \frac{<\vec{v},\vec{u}_j>}{c^2}\right)^{-1}\left(\vec{u}_j + \frac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}\frac{<\vec{v},\vec{u}_j>}{c^2}\vec{v} - \gamma_v\vec{v}\right) \tag{5}$$

En notant $\vec{a}_j(t) = \dfrac{d}{dt}\vec{u}_j(t)$, $\vec{a}'_j(t') = \dfrac{d}{dt'}\vec{u}'_j(t')$, il vient, $\wedge$ étant le produit vectoriel relatif à $\mathcal{B}(\mathcal{R})$,

$$\vec{a}'_j = \gamma_v^{-2}\left(1 - \frac{<\vec{v},\vec{u}_j>}{c^2}\right)^{-3}\left(\vec{a}_j + \frac{\vec{v}}{c^2}\wedge(\vec{u}_j\wedge\vec{a}_j) - \frac{\gamma_v}{1+\gamma_v}\frac{<\vec{v},\vec{a}_j>}{c^2}\vec{v}\right)$$

En l'évènement α décrit dans $\mathcal{R}$ par $(t,\vec{r}_j(t))$, il existe un unique référentiel $\mathcal{R}_\alpha(M_j,\mathcal{R})$, choisi dans la classe des référentiels en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, dans lequel M_j a une vitesse nulle. C'est le référentiel dont le vecteur vitesse dans $\mathcal{R}$ est égal à $\vec{u}_j(t)$. L'accélération propre de M_j en α et relativement à $\mathcal{R}$ est son accélération dans $\mathcal{R}_\alpha(M_j,\mathcal{R})$ et est déterminé par la relation

$$\vec{a}_j^{\,\alpha} = \gamma_{u_j}^4\left(\vec{a}_j + \frac{\vec{u_j}}{c^2}\wedge(\vec{u}_j\wedge\vec{a}_j) - \frac{\gamma_{u_j}}{1+\gamma_{u_j}}\frac{<\vec{u_j},\vec{a}_j>}{c^2}\vec{u_j}\right)$$

On peut remarquer les relations

$$\vec{u}_j\wedge\vec{a}_j = \vec{0} \Longrightarrow \vec{a}_j^{\,\alpha} = \gamma_{u_j}^3\vec{a}_j = \frac{d}{dt}(\gamma_{u_j}\vec{u}_j)\ ,\ <\vec{u}_j,\vec{a}_j> = 0 \Longrightarrow \vec{a}_j^{\,\alpha} = \gamma_{u_j}^2\vec{a}_j = \gamma_{u_j}\frac{d}{dt}(\gamma_{u_j}\vec{u}_j)$$

Par ailleurs,

$$< \vec{u}_j, \vec{a}_j^{\,\alpha} >= \gamma_{u_j}^3 < \vec{u}_j, \vec{a}_j > \quad , \quad \vec{u}_j \wedge \vec{a}_j^{\,\alpha} = \gamma_{u_j}^2 \vec{u}_j \wedge \vec{a}_j$$

Il vient

$$\vec{a}_j = \gamma_{u_j}^{-4} \left(\vec{a}_j^{\,\alpha} - \gamma_{u_j}^2 \frac{\vec{u_j}}{c^2} \wedge (\vec{u}_j \wedge \vec{a}_j^{\,\alpha}) + \frac{\gamma_{u_j}^2}{1+\gamma_{u_j}} \frac{< \vec{u_j}, \vec{a}_j^{\,\alpha} >}{c^2} \vec{u_j} \right) \tag{6}$$

3.1.2 Les lois de Newton

Les deux premières lois de Newton peuvent s'énoncer ainsi :

1. La trajectoire d'un corps libre est rectiligne et uniforme.
2. Le vecteur force auquel est soumit un corps de masse m en un évènement où il subit une accélération $\vec{a}$ est égale à $m \times \vec{a}$

La transformation de Lorentz-Poincaré indique que sous cette forme, ces lois qui sont des définitions ne peuvent être valables que dans un unique referentiel.

Postulat 8. *Une entité n'est soumise à aucune force s'il est impossible d'identifier les causes qui lui imposent sa trajectoire et toute entité pouvant être immobilisée possède une masse inerte qui est une de ses propriétés fondamentales. Relativement à un quelconque système de coordonnées cartésien, la résultante des vecteurs forces appliqués à un point matériel en un évènement où il est immobile est égale à sa masse inerte multipliée par l'accélération qu'il subit et divisée par le carrée de la vitesse de propagation d'une sphère électrique.*

3.1.3 La force de Lorentz

Une entité immobile n'est soumise à aucune force et nécessairement, la notion de force permet de décrire la cause de la variation du vecteur vitesse d'un point matériel dans une quelconque classe de referentiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres puisque, pour tout évènement élément de sa trajectoire, il y est immobile dans un de ces referentiels. L'étalon des masses étant choisi, l'accélération qu'il subit lors de sa mise en mouvement permet de définir la force qui lui est appliquée mais on ne sais rien des effets de cette même force lorsqu'il est en mouvement. La résultante des forces qui lui sont appliquées en un quelconque évènement étant leur somme (postulat 10), quelque soit la classe $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ de referentiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres qui contient $\mathcal{R}$, l'application $\mathcal{T}_{m_j}^{\vec{u}_j}$ qui associe au vecteur force auquel il soumit dans l'élément de $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ où sa vitesse est $\vec{u}_j$ le vecteur force constaté dans l'élément de $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ où sa vitesse est nulle doit être linéaire et doit permettre de transformer la force électromagnétique de Lorentz, exercée par une charge q_i en translation uniforme sur une charge test q_j et fonction du mouvement de cette dernière, en la force radiale de Coulomb constaté dans l'élément de $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ où q_i est immobile.
On sait (Coulomb) que l'interaction entre deux charges statiques s'effectue suivant la droite qui les relie, que la direction du champ magnétique crée par un conducteur rectiligne infini lorsqu'il est parcouru par un courant est déterminée par l'observateur d'Ampère, que deux tels conducteurs disposés parallèlement sur un plan s'attirent ou se repoussent suivant le sens et l'intensité des courants, que courant électrique est dû au déplacement à vitesse réglable de la matière chargée, que le mouvement de cette matière s'effectue sans variation de vitesse lorsqu'elle est plongée dans un champ magnétique, les figures décrites par deux charges de natures différentes étant quasiment symétriques si le champ est uniforme, que cette matière décrit quasiment une droite lorsqu'elle se déplace, de l'une vers l'autre, entre deux surfaces planes uniformément électrisées et de charges opposées. La formule de Lorentz, qui généralise la force expérimentale de Laplace,

prédit avec une précision appréciable la trajectoire de la matière chargée dans des conditions imposées et s'écrit

$$q_j(\vec{E}_i + \vec{u}_j \wedge \vec{B}_i) = m_j \frac{d}{dt}\vec{u}_j$$

Le postulat suivant permet, lorsqu'on lui associe celui (indispensable dans cet objectif) de l'invariance quantitative de la charge par rapport au mouvement de la matière porteuse, de retrouver l'expression de la force de Lorentz et les propriétés à l'origine de sa formulation.

Postulat 9. *Relativement à un quelconque referentiel, le vecteur force auquel est soumit un point matériel de masse inerte m en un évènement où son vecteur vitesse est $\vec{u}$ et son vecteur accélération $\vec{a}$, est donné par la relation*

$$\vec{F} = \frac{m}{c^2}\gamma_u^3 \left(\vec{a} + \frac{\vec{u}}{c^2} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{a})\right) = \frac{m}{c^2}\frac{d}{dt}(\gamma_u \vec{u})$$

3.1.4 Transformation du vecteur force

On peut remarquer les propriétés, $\forall\ (t^-, t^+) \in \mathbb{R}^2$,

$$< \vec{F}(t), \vec{u}(t) >= 0\ \ \forall\ t \in]t^-, t^+[\ \implies\ \frac{d}{dt} < \vec{u}(t), \vec{u}(t) >= 0\ \ \forall\ t \in]t^-, t^+[$$

$$\frac{\vec{F}(t)}{\|\vec{F}(t)\|} = \frac{\vec{u}(t^-)}{\|\vec{u}(t^-)\|}\ \ \forall\ t \in]t^-, t^+[\ \implies\ \frac{\vec{a}(t)}{\|\vec{a}(t)\|} = \frac{\vec{u}(t)}{\|\vec{u}(t)\|} = \frac{\vec{u}(t^-)}{\|\vec{u}(t^-)\|}\ \ \forall\ t \in]t^-, t^+[$$

Par ailleurs, $\vec{F}^{\|}$ (resp. $\vec{F}^{\perp}$) étant la projection de $\vec{F}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ (resp. l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$),

$$\mathcal{T}_m^{\vec{u}}(\vec{F}) = \mathcal{T}_m^{\vec{u}}(\vec{F}^{\|} + \vec{F}^{\perp}) = \vec{F}^{\|} + \gamma_u \vec{F}^{\perp} = \gamma_u \vec{F} - \frac{\gamma_u^2}{1+\gamma_u}\frac{< \vec{u}, \vec{F} >}{c^2}\ \vec{u}$$

L'existence de l'électromagnétisme implique que $\mathcal{T}_m^{\vec{u}}$ soit une fonction de $\vec{u}$ et son expression qui précède est nécessairement la plus élémentaire des applications admissibles.
Par ailleurs, si t_α est la variable temporelle dans $\mathcal{R}_\alpha(M_j, \mathcal{R})$, alors

$$\frac{d}{dt_\alpha}\vec{r}_j(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{r}_j(t+\delta t) - \vec{r}_j(t)}{t_\alpha(t+\delta t, \vec{r}_j(t+\delta t)) - t_\alpha(t, \vec{r}_j(t))} = \lim_{\delta t \to 0} \gamma_{u_j} \frac{\vec{r}_j(t+\delta t) - \vec{r}_j(t)}{\delta t} = \gamma_{u_j}\frac{d}{dt}\vec{r}_j(t) = \gamma_{u_j}\vec{u}_j$$

On peut noter

$$\left(\frac{d}{dt_\alpha}t, \frac{d}{dt_\alpha}\vec{r}_j(t)\right) = \left(\gamma_{u_j}, \gamma_{u_j}\vec{u}_j\right)\ ,\ \left(m\frac{d^2}{dt_\alpha^2}\ t, m\frac{d^2}{dt_\alpha^2}\ \vec{r}_j(t)\right) = \left(\gamma_{u_j} < \vec{u}_j, \vec{F} >, \gamma_{u_j} c^2 \vec{F}\right)$$

La dérivation par rapport à la variable t_α de la transformation $(t', \vec{r}_j'(t')) \to (t, \vec{r}_j(t))$ donne

$$\gamma_{u_j} = \gamma_v \gamma_{u_j'}\left(1 + \frac{< \vec{v}, \vec{u}_j' >}{c^2}\right)\ \ ,\ \ \gamma_{u_j}\vec{F} = \gamma_{u_j'}\left(\vec{F}' + \frac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}\frac{< \vec{v}, \vec{F}' >}{c^2}\vec{v} + \gamma_v \frac{< \vec{u_j'}, \vec{F}' >}{c^2}\vec{v}\right) \quad (7)$$

3.2 Champs associés à une charge en translation uniforme

3.2.1 La force électromagnétique

Si M_j est un point matériel porteur de la charge q_j, et si la force $\vec{F}'(\tilde{t}', \vec{r}'_j(\tilde{t}'))$ à laquelle il est soumit en l'évènement décrit par $(\tilde{t}', \vec{r}'_j(\tilde{t}'))$ dans $\mathcal{R}'$ est due à une charge q_i qui y est continûment immobile et située en M', parce qu'une interaction à distance et instantanée est inconcevable (la mise en mouvement de q_i ne peut induire au même instant une variation de son action sur q_j), le champ électrique en $(\tilde{t}', \vec{r}'_j(\tilde{t}'))$ est une pertubation qui a pris naissance en M' à la date $\tilde{t}' - \dfrac{\|\vec{r}'_j(\tilde{t}')\|}{c}$. Quelque soit le réel t', on note $\vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j}$ l'unique vecteur tel que

$$\vec{r}'_j\left(t' + \frac{1}{c}\|\vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j}\|\right) = \vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j}$$

La formule de Coulomb s'écrit, q_j pouvant être une fonction de $\vec{u}'_j$,

$$\vec{F}'\left(t' + \frac{1}{c}\|\vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j}\|, \vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j} + \overrightarrow{O'M'}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{kq_iq_j}{\|\vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j}\|^3}\vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j}$$

Cette force est due à la pertubation qui a pris naissance en M' et à la date t' dans $\mathcal{R}'$, en $M'(t)$ et à la date t dans $\mathcal{R}$. On peut noter $\vec{r}_i(t) = \overrightarrow{OM'(t)}$, $\dfrac{d}{dt}\vec{r}_i = \vec{v}$. L'action dans $\mathcal{R}$ de cette pertubation sur M_j est une force $\vec{F}\left(t + \dfrac{1}{c}\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\|, \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} + \vec{r}_i(t)\right)$ et la relation 7 permet d'écrire

$$\gamma_{u_j}\vec{F}\left(t + \frac{1}{c}\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\|, \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} + \vec{r}_i(t)\right) = \frac{\gamma_{u'_j}}{c^2}\frac{kq_iq_j}{\|\vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j}\|^3}\left(\vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j} + < \vec{v}, \vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j} > \frac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}\frac{\vec{v}}{c^2} + \gamma_v < \vec{u}'_j, \vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j} > \frac{\vec{v}}{c^2}\right)$$

$\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}$ étant l'unique vecteur tel que

$$\vec{r}_j\left(t + \frac{1}{c}\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\|\right) = \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} + \vec{r}_i(t)$$

On a les relations

$$(t', \vec{0}) = \mathcal{L}_{\vec{v}}\left(t, \vec{r}_i(t)\right) \quad , \quad \left(t' + \frac{1}{c}\|\vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j}\|, \vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j}\right) = \mathcal{L}_{\vec{v}}\left(t + \frac{1}{c}\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\|, \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} + \vec{r}_i(t)\right)$$

En effectuant la soustraction membre à membre de ces deux égalités, il vient

$$\|\vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j}\| = \gamma_v\left(\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\| - < \frac{\vec{v}}{c}, \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} >\right) \ , \ \vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j} = \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} + \frac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}\frac{< \vec{v}, \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} >}{c^2}\vec{v} - \gamma_v\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\|\frac{\vec{v}}{c} \qquad (8)$$

Il résulte des relations 5 et 8 les égalités

$$\begin{aligned}
\gamma_v\left(1 - \frac{< \vec{v}, \vec{u}_j >}{c^2}\right)\frac{< \vec{u}'_j, \vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j} >}{c^2} &= \frac{< \vec{u}_j, \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} >}{c^2} + \gamma_v^2\frac{< \vec{v}, \vec{v} >}{c^3}\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\| - \gamma_v^2\frac{< \vec{v}, \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} >}{c^2} \\
&+ \gamma_v^2\frac{< \vec{v}, \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} >}{c^2}\frac{< \vec{v}, \vec{u}_j >}{c^2} - \gamma_v^2\frac{< \vec{v}, \vec{u}_j >}{c^3}\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\| \\
\frac{< \vec{v}, \vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j} >}{c^2} &= \gamma_v\frac{< \vec{v}, \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} >}{c^2} - \gamma_v\frac{< \vec{v}, \vec{v} >}{c^3}\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\| \\
\vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j} + \frac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}\frac{< \vec{v}, \vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j} >}{c^2}\vec{v} &= \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} + \gamma_v^2\frac{< \vec{v}, \vec{\xi}_{t,\vec{r}_j} >}{c^2}\vec{v} - \gamma_v^2\frac{\vec{v}}{c}\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\|
\end{aligned}$$

En multipliant la première égalité par $\vec{v}$, la dernière par $(1 - \frac{<\vec{v},\vec{u}_j>}{c^2})$ et en les additonnant, il vient

$$\gamma_{u_j}\left(1-\frac{<\vec{v},\vec{u}_j>}{c^2}\right)\vec{F}\left(t+\frac{1}{c}\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\|,\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}+\vec{r}_i(t)\right)=\frac{\gamma_{u'_j}}{c^2}\frac{kq_iq_j}{\|\vec{\xi}'_{t',\vec{r}'_j}\|^3}\left(\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}-\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\|\frac{\vec{v}}{c}+\frac{\vec{u}_j}{c^2}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j})\right)$$

On peut établir

$$\gamma_{u'_j}=\gamma_v\gamma_{u_j}\left(1+\frac{<\vec{v},\vec{u}_j>}{c^2}\right)$$

Il vient la formule

$$\vec{F}\left(t+\frac{1}{c}\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\|,\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}+\vec{r}_i(t)\right)=\frac{\gamma_v^{-2}}{c^2}\frac{kq_iq_j}{\left(\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\|-<\frac{\vec{v}}{c},\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}>\right)^3}\left(\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}-\|\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j}\|\frac{\vec{v}}{c}+\frac{\vec{u}_j}{c^2}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{\xi}_{t,\vec{r}_j})\right)$$

$$\vec{F}=q_j\left(\vec{E}_i+\vec{u}_j\wedge\vec{B}_i\right) \tag{9}$$

Les champs $\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$ sont des ondes progressives qui s'affaiblissent au cours du temps et on retrouve la loi expérimentale de Biot et Savart comme étant approximatives lorsque $<\vec{v},\vec{v}>$ est négligeable par rapport à c^2.

3.2.2 Les équations de Maxwell dites dans le vide

Les vecteurs champs électrique et magnétique qui sont associés à q_i en un point M et à la date $t+\frac{1}{c}\|\overrightarrow{M'(t)M}\|$ dans $\mathcal{R}$ sont définis par les relations, $\vec{L}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{r}=\overrightarrow{M'(t)M}=\vec{L}-\vec{r}_i(t)$, $\vec{v}=\frac{d}{dt}\vec{r}_i=\vec{u}_i$,

$$\vec{E}_i\left(t+\frac{\|\vec{r}\|}{c},\vec{r}+\vec{r}_i(t)\right)=\gamma_{u_i}^{-2}\frac{kq_i}{c^2}\frac{\vec{r}-\|\vec{r}\|\frac{\vec{u}_i}{c}}{\left(\|\vec{r}\|-<\frac{\vec{u}_i}{c},\vec{r}>\right)^3} \tag{10}$$

$$\vec{B}_i\left(t+\frac{\|\vec{r}\|}{c},\vec{r}+\vec{r}_i(t)\right)=\gamma_{u_i}^{-2}\frac{kq_i}{c^4}\frac{\vec{u}_i\wedge\vec{r}}{\left(\|\vec{r}\|-<\frac{\vec{u}_i}{c},\vec{r}>\right)^3} \tag{11}$$

On peut définir les potentiels

$$V_i\left(t+\frac{\|\vec{r}\|}{c},\vec{r}+\vec{r}_i(t)\right)=\gamma_{u_i}^{-2}\frac{kq_i}{c^2}\frac{\|\vec{r}\|}{\left(\|\vec{r}\|-<\frac{\vec{u}_i}{c},\vec{r}>\right)^2} \tag{12}$$

$$\vec{A}_i\left(t+\frac{\|\vec{r}\|}{c},\vec{r}+\vec{r}_i(t)\right)=\gamma_{u_i}^{-2}\frac{kq_i}{c^3}\frac{\vec{r}}{\left(\|\vec{r}\|-<\frac{\vec{u}_i}{c},\vec{r}>\right)^2} \tag{13}$$

Si $\vec{L}$ (resp. $\vec{r}$) a pour composantes (X, Y, Z) (resp. (x,y,z)) dans $\mathcal{B}(\mathcal{R})$, on peut noter

$$V_i\left(t+\frac{\|\vec{r}\|}{c},\vec{L}\right)=V_i\left(\sigma,\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}\right)=\tilde{V}_i\left(t,\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}\right)=\tilde{V}_i\left(\varsigma^{-1}(\sigma,\vec{L}),\vec{L}\right)$$

$$\varsigma^{-1}(\sigma,\vec{L}) = \inf\left\{t, t+\frac{1}{c}\|\vec{L}-\vec{r}_i(t)\| \geq \sigma\right\}$$

$$\vec{\nabla}V_i = \frac{\partial V_i}{\partial \mathrm{X}}\vec{e}_2 + \frac{\partial V_i}{\partial \mathrm{Y}}\vec{e}_3 + \frac{\partial V_i}{\partial \mathrm{Z}}\vec{e}_4 \ , \ \vec{\nabla}\tilde{V}_i = \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial \mathrm{X}}\vec{e}_2 + \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial \mathrm{Y}}\vec{e}_3 + \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial \mathrm{Z}}\vec{e}_4$$

Il vient

$$dV_i = <\vec{\nabla}V_i, d\vec{L}> + \frac{\partial V_i}{\partial \sigma}d\sigma = d\tilde{V}_i = <\vec{\nabla}\tilde{V}_i, d\vec{L}> + \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t}dt \ , \ d\vec{r} = d\vec{L} - \vec{u}_i dt$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial \sigma} = \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{r}\| - <\frac{\vec{u}_i}{c}, \vec{r}>}\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} \ , \ \vec{\nabla}V_i = \vec{\nabla}\tilde{V}_i - \frac{1}{c}\ \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\| - <\frac{\vec{u}_i}{c}, \vec{r}>}\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t}$$

Par ailleurs,

$$\frac{d\vec{r}}{d\mathrm{X}} = \vec{e}_2 \ , \ \frac{d}{d\mathrm{X}}\|\vec{r}\| = \frac{<\vec{e}_2, \vec{r}>}{\|\vec{r}\|} \ , \ \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{u}_i \ , \ \frac{d}{dt}\|\vec{r}\| = -\frac{<\vec{u}_i, \vec{r}>}{\|\vec{r}\|}$$

Ces formules de différentiation permettent d'établir par des calculs directs, sachant $\frac{d\vec{u}_i}{dt} = \vec{0}$,

$$\vec{E}_i = -\vec{\nabla}V_i - \frac{\partial \vec{A}_i}{\partial \sigma} \ , \ \vec{B}_i = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_i \ , \ <\vec{\nabla}, \vec{E}_i >= 0 \ , \ \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}_i}{\partial \sigma} = \vec{0} \tag{14}$$

Ces équations sont vectorielles car ne dépendent pas du choix de la base $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ ayant servie pour les établir. Par ailleurs, l'intérêt de leur linéarité est mise en évidence par le postulat suivant, énoncé pour sa simplicité, son caractère pratique pour l'étude des distributions de charges et les résultats satisfaisants obtenus en électromagnétisme lorsque les vecteurs champs en un quelconque point de l'espace sont indépendant du temps :

Postulat 10. *(Principe de superposition)*
Relativement à un quelconque référentiel, la résultante des vecteurs forces appliqués à un point matériel en un quelconque évènement est égale à leur somme.

3.3 Approximation des champs associés à une distribution de charges

3.3.1 Approximation des champs associés à une charge accélérée

On suppose que la pertubation qui prend naissance en un évènement où le vecteur vitesse instantanné de q_i est $\vec{u}_i(t)$ a les mêmes propriétés (même action sur une charge test) que celle qui aurait été crée si son mouvement était rectiligne et uniforme de vecteur vitesse $\vec{u}_i(t)$. Ainsi, les champs qui lui sont associés sont de nature électromagnétique et les équations 10 et 11 sont supposés exactes, $\vec{u}_i$ n'étant pas nécessairement un vecteur constant. Cette approximation est réaliste si son vecteur vitesse est quasiment constant par morceau c'est à dire que les accélérations qu'il subit sont négligeables par rapport à une certaine quantité. Le but étant de retrouver les équations de Maxwell car on ne dispose pas d'une méthode permettant de déduire toutes les relations linéaires que satisfont 10 et 11, 12 et 13 permettent d'établir

$$\vec{E}_i = -\vec{\nabla}V_i - \frac{\partial \vec{A}_i}{\partial \sigma} \ , \ \vec{B}_i = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_i \ , \ <\vec{\nabla}, \vec{E}_i >= \rho_i \ , \ \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}_i}{\partial \sigma} = \vec{J}_i \tag{15}$$

$$\rho_i\left(t + \frac{\|\vec{r}\|}{c}, \vec{r} + \vec{r}_i(t)\right) = 2\gamma_{u_i}^{-3}\frac{kq_i}{m_i c^4}\frac{\|\vec{r}\|}{\left(\|\vec{r}\| - <\frac{\vec{u}_i}{c}, \vec{r}>\right)^4}\left(<\frac{\vec{u}_i}{c}, \vec{F}>\|\vec{r}\| - <\vec{F}, \vec{r}>\right) \tag{16}$$

$$\vec{J}_i\left(t+\frac{\|\vec{r}\|}{c},\vec{r}+\vec{r}_i(t)\right)=2\gamma_{u_i}^{-3}\frac{kq_i}{m_ic^5}\frac{\vec{r}}{\left(\|\vec{r}\|-<\frac{\vec{u}_i}{c},\vec{r}>\right)^4}\left(<\frac{\vec{u_i}}{c},\vec{F}>\|\vec{r}\|-<\vec{F},\vec{r}>\right) \quad (17)$$

3.3.2 Équations de propagation

Les vecteurs champs électrique et magnétique associés à une quelconque distribution de charges sont solution des équations, écrites en un quelconque évènement décrit par (t,x,y,z) dans $\mathcal{R}$, les coordonnées dans la base $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ de $\vec{\nabla}$ étant relatives aux variable x, y et z,

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ,\ <\vec{\nabla},\vec{B}>=0\ ,\ <\vec{\nabla},\vec{E}>=\rho\ ,\ \vec{\nabla}\wedge\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{J}$$

On peut établir la relation

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})=\vec{\nabla}<\vec{\nabla},\vec{E}>-<\vec{\nabla},\vec{\nabla}>\vec{E}$$

Il résulte les équations

$$<\vec{\nabla},\vec{\nabla}>\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{\nabla}\rho+\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\quad,\quad<\vec{\nabla},\vec{\nabla}>\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=-\vec{\nabla}\wedge\vec{J}$$

Les résultantes ρ et $\vec{J}$ sont les sommes des contributions des différentes charges auxquelles sont associés les champs étudiés et ne sont pas définies sur leurs trajectoires. A priori, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ peuvent être représentés par la fonction de Green associée à l'opérateur de d'Alembert.

3.4 Conclusion

Parce qu'on retrouve la formule intuitive de Galilée pour des vitesse négligeables par rapport à celle d'une sphère électrique, parce qu'elle établie la cohérence des lois expérimentales qui régissent les interactions électromagnétiques, prédit la force de Lorentz, la loi de Biot et Savart, le phénomène d'induction électromagnétique, la loi de faraday et plus généralement les équations de Maxwell dites dans la vide à partir de la formule fondamentale de Coulomb qui est alors justifiée, parce qu'elle justifie le résultat de l'expérience de Fizeau qui valide son expression et celui de l'expérience de Michelson et Morley qui valide sa conception, la formule spéciale généralisée de Lorentz décrit de façon satisfaisante la transformation des coordonnées d'espace et de temps entre deux systèmes cartésiens relatifs à des bases orthonormées et en translation uniforme. Il est légitime d'espérer que la détermination des formules explicites des transformations valables entre deux quelconques systèmes de coordonnées permette de mettre en évidence toutes les facettes de l'interaction d'origine électrique entre les matières chargées.

4 Les transformations admissibles

Les espaces physiques des referentiels considérés sont supposés euclidiens.

4.1 Les transformations réellement admissibles

Si on suppose qu'une pertubation crée en un évènement par une charge électrique, qui se propage dans le referentiel $\mathcal{R}$ où elle est immobile sous forme d'une sphère dont le rayon croît à vitesse constante, se propage sous cette forme dans tous les referentiels en translation uniforme par rapport $\mathcal{R}$, alors il est possible de contruire la transformation de Lorentz-Poincaré et de prédire les lois expérimentales de l'électromagnétisme.

Postulat 11. *Une pertubation crée en un évènement par une charge électrique, qui se propage dans le referentiel où elle est immobile sous forme d'une sphère dont le rayon croît à vitesse constante, se propage sous cette forme dans tous les referentiels.*

Une transformation réellement admissible est une application bijective définie sur $\mathbb{R}^4$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^4$, continûment différentiable au second ordre, qui décrit la transformation des coordonnées d'espace et de temps entre deux repères cartésiens relatifs à des bases orthonormées de l'espace. Une telle application peut être notée $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, x_1 étant la variable temporelle multipliée par la vitesse (positive) de propagation d'une sphère électrique. Il résulte du postulat qui précède, quelques soient $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ éléments de $\mathbb{R}^4$, la relation

$$\left\{ (y_1 - x_1)^2 = \sum_{i=2}^{4} (y_i - x_i)^2 \right\} \iff \left\{ (f_1(y) - f_1(x))^2 = \sum_{i=2}^{4} (f_i(y) - f_i(x))^2 \right\} \tag{18}$$

Si une sphère électrique est crée en l'évènement décrit par x (resp. $f(x)$) dans un referentiel $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$), et si un phénomène s'y produit en un évènement décrit par y dans $\mathcal{R}$, la distance spatiale qui le sépare du lieu de création de la sphère est égale à la distance temporelle (normalisée), dans $\mathcal{R}$ comme dans $\mathcal{R}'$. Cette relation définie l'invariant relativiste si f est affine et est réalisée entre deux systèmes de coordonnées utilisant le même étalon des distances spatiales.
Si f est une transformation réellement admissible et non affine qui est réalisée entre deux referentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, alors l'ensemble des évènements décrivant dans $\mathcal{R}$ l'évolution d'une sphère électrique décrivent dans $\mathcal{R}'$ la trajectoire non rectiligne d'un point dont la vitesse d'éloignement du lieu de création de la sphère est de module constant. Une transformation admissible est une hypothétique transformation des coordonnées d'espace et de temps entre deux systèmes cartésiens relatifs à des bases orthonormées, continûment différentiable, qui transforme toute trajectoire réalisée à la vitesse de propagation d'une sphère électrique en une trajectoire similaire. Toute transformation réellement admissible et affine est une transformation admissible car sa matrice différentielle vérifie l'équation 20 et par conséquent l'équation 19.

Proposition 4.1. *Toute transformation réellement admissible est une transformation admissible.*

4.2 Le groupe des transformations admissibles

On considère deux systèmes cartésiens $\mathcal{R} = \mathcal{R}(O, x, y, z)$ et $\mathcal{R}' = \mathcal{R}'(O', x', y', z')$, chacun étant munit d'un repère orthonormé d'espace. Le postulat 11 permet de préciser l'application f qui associe à (ct, x, y, z), coordonnées dans $\mathcal{R}$ d'un certain évènement, ses coordonnées $(c't', x', y', z')$ dans $\mathcal{R}'$ (l'existence de cette application continue est assurée par les postulats 3 et 6). La trajectoire dans $\mathcal{R}$ d'un point matériel dont l'intensité du vecteur vitesse est égal à c est décrite par l'ensemble, entre les évènements a et b,

$$\{(ct, x(ct), y(ct), z(ct)), t \in]t_a, t_b[, (\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2 = c^2\}$$

On peut définir les ensembles

$$\tilde{S}_1 = \{(u_2, u_3, u_4)\ ,\ u_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ ,\ u_i = u_i(\xi)\ ,\ \sum_{i=2}^{4} (\frac{du_i}{d\xi})^2 = 1\}$$

$$\mathcal{T}(\tilde{S}_1) = \Big\{ \{(u_1(\eta), u(u_1(\eta)))\ ,\ \eta \in \mathcal{O}\}\ ,\ u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ ,\ u \in \tilde{S}_1\ ,\ \mathcal{O} \text{ ouvert de } \mathbb{R} \Big\}$$

On peut noter

$$\Lambda' = \{(u'_1(\eta), u'_2(u'_1(\eta)), u'_3(u'_1(\eta)), u'_4(u'_1(\eta)))\ ,\ \eta \in \mathcal{O}\} = \{f(M), M \in \Lambda\} = f(\Lambda)\ \ ,\ \ \Lambda \in \mathcal{T}(\tilde{S}_1)$$

Le postulat 11 est alors contenu dans la relation

$$\Lambda \in \mathcal{T}(\tilde{S}_1) \Longrightarrow f(\Lambda) \in \mathcal{T}(\tilde{S}_1) \tag{19}$$

On peut écrire, $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, $i \in \{2, 3, 4\}$,

$$\frac{du'_1}{d\eta} = \frac{df_1}{dx_1}\frac{du_1}{d\eta} + \sum_{j=2}^{4} \frac{df_1}{dx_j}\frac{du_j}{d\xi}\frac{du_1}{d\eta}\ ,\ \frac{d(u'_i \circ u'_1)}{d\eta} = \frac{df_i}{dx_1}\frac{du_1}{d\eta} + \sum_{j=2}^{4} \frac{df_i}{dx_j}\frac{du_j}{d\xi}\frac{du_1}{d\eta}$$

En notant F la matrice différentielle de f, il vient

$$\begin{pmatrix} \dfrac{du'_1}{d\eta} \\ \dfrac{d(u'_2 \circ u'_1)}{d\eta} \\ \dfrac{d(u'_3 \circ u'_1)}{d\eta} \\ \dfrac{d(u'_4 \circ u'_1)}{d\eta} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \dfrac{du_1}{d\eta} \\ \dfrac{d(u_2 \circ u_1)}{d\eta} \\ \dfrac{d(u_3 \circ u_1)}{d\eta} \\ \dfrac{d(u_4 \circ u_1)}{d\eta} \end{pmatrix}\ \ ,\ \ \frac{du'_1}{d\eta} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{du'_2}{d\xi} \\ \dfrac{du'_3}{d\xi} \\ \dfrac{du'_4}{d\xi} \end{pmatrix} = F\ \frac{du_1}{d\eta} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{du_2}{d\xi} \\ \dfrac{du_3}{d\xi} \\ \dfrac{du_4}{d\xi} \end{pmatrix}$$

La relation 19 peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i=2}^{4} \left(\frac{d(u_i \circ u_1)}{du_1}\right)^2 = 1 \implies \sum_{i=2}^{4} \left(\frac{d(u'_i \circ u'_1)}{du'_1}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{du_1}{d\eta}\right)^2 - \sum_{i=2}^{4} \left(\frac{d(u_i \circ u_1)}{d\eta}\right)^2 = 1 \implies \left(\frac{du'_1}{d\eta}\right)^2 - \sum_{i=2}^{4} \left(\frac{d(u'_i \circ u'_1)}{d\eta}\right)^2 = 1$$

Il résulte que F est telle que

$$\forall\ h \in \mathbb{R}^4\ ,\ \left\{h_1^2 - \sum_{i=2}^{4} h_i^2 = 0\right\} \implies \left\{{h'_1}^2 - \sum_{i=2}^{4} {h'_i}^2 = 0\right\}\ \ ,\ \ h' = Fh \tag{20}$$

On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des applications définies sur $\mathbb{R}^4$, continûment différentiables et dont la matrice différentielle satisfait la relation ci-dessus. C'est l'ensemble des transformations admissibles qui forment nécessairement un groupe d'après les expressions connues de la matrice différentielle de l'inverse d'une application et de celle de la composée de deux applications.

4.3 Équations caractéristiques

Soit $h \in \mathbb{R}^4$. On pose

$$h' = Fh\ \ ,\ \ f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ \ ,\ \ P(h) = h_1^2 - \sum_{i=2}^{4} h_i^2$$

Il vient

$$h'_i = \sum_{j=1}^{4} f_{ij} h_j\ \ ,\ \ P(h') = \sum_{i=1}^{4} \left(f_{1i}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{ki}^2\right) h_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} \left(f_{1i} f_{1j} - \sum_{k=2}^{4} f_{ki} f_{kj}\right) h_i h_j$$

$P(h)$ et $P(h')$ sont des polynômes de second degré par rapport à la variable h_1 et de la relation

$$P(h) = 0 \implies P(h') = 0$$

il résulte qu'il existe une fonction réelle μ définie sur $\mathbb{R}^4$ et non nulle en tout point, telle que

$$P(h') = \mu P(h)$$

Il vient les équations

$$f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{k1}^2 = \mu \quad , \quad f_{1i}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{ki}^2 = -\mu \ (i \neq 1) \quad , \quad f_{1i}f_{1j} - \sum_{k=2}^{4} f_{ki}f_{kj} = 0 \ (i \neq j)$$

On peut écrire

$$F^tF = \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} f_{11}^2 & f_{11}f_{12} & f_{11}f_{13} & f_{11}f_{14} \\ f_{12}f_{11} & f_{12}^2 & f_{12}f_{13} & f_{12}f_{14} \\ f_{13}f_{11} & f_{13}f_{12} & f_{13}^2 & f_{13}f_{14} \\ f_{14}f_{11} & f_{14}f_{12} & f_{14}f_{13} & f_{14}^2 \end{pmatrix}$$

On peut écrire

$$F^tF = \mu J + 2(f_{1i}f_{1j})_{ij} \tag{21}$$

Le calcul du déterminant donne, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, I la matrice identité,

$$\det(F^tF - \lambda I) = (\mu - \lambda)^2\{2(\mu - \lambda)f_{11}^2 - (\mu + \lambda)(2f_{12}^2 + 2f_{13}^2 + 2f_{14}^2 + \mu - \lambda)\}$$

$\forall\ x \in \mathbb{R}^4$, le quadruplet de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x))$, $p_i = (f_{2i}, f_{3i}, f_{4i})^t$, est nécessairement lié par conséquent, il existe quatre fonctions réelles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, qui ne peuvent s'annuler simultanément, telles que

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^4\ ,\ \sum_{i=1}^{4} \alpha_i(x)p_i(x) = 0$$

On peut écrire

$$p_j^t \left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i p_i \right) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i (p_j^t p_i) = 0\ ,\ 1 \leq j \leq 4$$

Le déterminant de la matrice $(p_j^t p_i)_{ij}$ est nécessairement nul. L'équation 21 donne

$$p_1^t p_1 = f_{11}^2 - \mu \quad , \quad p_i^t p_i = f_{1i}^2 + \mu \ (i \neq 1) \quad , \quad p_i^t p_j = f_{1i}f_{1j} \ (i \neq j) \tag{22}$$

Il vient

$$\det\left((p_j^t p_i)_{ij}\right) = \mu^3 \left\{ f_{11}^2 - \mu - \sum_{i=2}^{4} f_{1i} \right\}\ ,\ \mu = f_{11}^2 - \sum_{i=2}^{4} f_{1i}^2$$

En considérant l'équation 21 et la nouvelle expression de μ, il est naturel de définir f_1 comme étant la fonction génératrice de f. Par ailleurs, on peut écrire

$$\det(F^tF - \lambda I) = (\mu - \lambda)^2\{\lambda^2 + 2\lambda(\mu - 2f_{11}^2) + \mu^2\}$$

On peut déduire les valeurs propres de F^tF

$$\lambda_1 = \mu \quad , \quad \lambda_2 = (2f_{11}^2 - \mu) - 2|f_{11}|\sqrt{f_{11}^2 - \mu} \quad , \quad \lambda_3 = (2f_{11}^2 - \mu) + 2|f_{11}|\sqrt{f_{11}^2 - \mu}$$

Le réel $\frac{f_{11}}{|f_{11}|}$ est bien défini : en effet, si h est un vecteur propre associé à la valeur propre μ, on peut écrire

$$0 < \ (Fh)^t(Fh) = h^t(F^tF)h = h^t(\mu h) = \mu(h^t h)$$

Nécessairement,

$$\mu = f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2 \ > 0 \ \ , \ \ f_{11}(x) \neq 0 \ \ \forall \ x \in \mathbb{R}^4$$

Il résulte de la continuité de la fonction f_{11} que son signe est constant. f_1 est une fonction monotone de la variable x_1 ce qui caractérise l'irreversibilité de l'écoulement du temps lors d'un changement de système de coordonnées.

Proposition 4.2. *Si $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est élément de $\mathcal{N}$, alors*

$$f_{i1} = \sum_{k=2}^{4} \frac{f_{1k}}{f_{11}} f_{ik} \ , \ 2 \leq i \leq 4$$

Si de plus f est continûment différentiable au second ordre, alors il existe trois matrices A_2,A_3,A_4, dont les coefficients ne dépendent que de la fonction génératrice f_1, telles que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} \quad , \quad (i,j) \in \{2,3,4\}$$

Démonstration. Montrons d'abord que, $\forall \ x \in \mathbb{R}^4$, les vecteurs $\{p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, soient α_2, α_3 et α_4 des fonctions réelles telles qu'il existe $x \in \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\sum_{i=2}^{4} \alpha_i(x) p_i(x) = 0$$

On peut écrire

$$p_j^t(x) \left(\sum_{i=2}^{4} \alpha_i(x) p_i(x) \right) = \sum_{i=2}^{4} \alpha_i(x)(p_j^t(x) p_i(x)) = 0 \ , \ 2 \leq j \leq 4$$

Le calcul donne

$$\det \left((p_j^t p_i)_{2 \leq i,j \leq 4} \right) = \mu f_{11}^2$$

Ce déterminant est non nul en tout point par conséquent $(\alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x)) = (0,0,0)$. C'est ce qu'on voulait démontrer. La matrice $(p_j^t p_i)_{2 \leq i,j \leq 4}$ a pour inverse

$$D = \frac{1}{\mu} I - \frac{1}{\mu f_{11}^2} (f_{1i} f_{1j})_{ij}$$

I étant la matrice identité de $\mathbb{R}^3$. On peut chercher α_2, α_3 et α_4 tels que

$$p_1 = \sum_{i=2}^{4} \alpha_i p_i$$

La solution est donnée par

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}p_1^t p_2\\ p_1^t p_3\\ p_1^t p_4\end{pmatrix} = \frac{1}{\mu f_{11}^2}\begin{pmatrix}f_{11}^2-f_{12}^2 & -f_{12}f_{13} & -f_{12}f_{14}\\ -f_{13}f_{12} & f_{11}^2-f_{13}^2 & -f_{13}f_{14}\\ -f_{14}f_{12} & -f_{14}f_{13} & f_{11}^2-f_{14}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{11}f_{12}\\ f_{11}f_{13}\\ f_{11}f_{14}\end{pmatrix}$$

Il vient

$$p_1 = \sum_{k=2}^{4}\frac{f_{1k}}{f_{11}}p_k \ , \ f_{i1} = \sum_{k=2}^{4}\frac{f_{1k}}{f_{11}}f_{ik} \quad , \quad 2\leq i\leq 4$$

Par ailleurs, en notant $p_{ij} = \dfrac{\partial p_i}{\partial x_j} = \left(\dfrac{\partial f_{2i}}{\partial x_j}, \dfrac{\partial f_{3i}}{\partial x_j}, \dfrac{\partial f_{4i}}{\partial x_j}\right)^t$, on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(p_i^t p_j) = p_i^t\left(\frac{\partial p_j}{\partial x_k}\right) + p_j^t\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right) = p_i^t p_{jk} + p_j^t p_{ik}$$

On peut déduire des équations 22 les relations, $2\leq i,j\leq 4$, $p_{ij} = p_{ji}$,

$$p_i^t p_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(f_{1i}^2+\mu) \ , \ p_j^t p_{ii} = \frac{\partial}{\partial x_i}(f_{1i}f_{1j}) - \frac{1}{2}(f_{1i}^2+\mu) \ (i\neq j)$$

$$p_i^t p_{jk} + p_j^t p_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k}(f_{1i}f_{1j}) \quad (i\neq j\neq k)$$

Cette dernière relation définie un système de trois équations à trois inconnues. Il est facilement inversible et on obtient

$$p_i^t p_{jk} = f_{1i}\frac{\partial f_{1j}}{\partial x_k} = f_{1i}\frac{\partial f_{1k}}{\partial x_j} \quad (i\neq j\neq k)$$

On peut chercher α_2^{ij}, α_3^{ij} et α_4^{ij} tels que

$$p_{ij} = \sum_{k=2}^{4}\alpha_k^{ij}p_k \ , \ 2\leq i,j\leq 4$$

La solution est donnée par

$$\begin{pmatrix}\alpha_2^{ij}\\ \alpha_3^{ij}\\ \alpha_4^{ij}\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}p_2^t p_{ij}\\ p_3^t p_{ij}\\ p_4^t p_{ij}\end{pmatrix}$$

Il résulte que les fonctions α_k^{ij}, $2\leq i,j,k\leq 4$, dépendent uniquement de la fonction génératrice f_1. On peut écrire

$$p_{ij} = \sum_{k=2}^{4}\alpha_k^{ij}p_k \implies \frac{\partial f_{li}}{\partial x_j} = \sum_{k=2}^{4}\alpha_k^{ij}f_{lk} \ , \ 2\leq i,j,l\leq 4$$

On peut mettre ces équations sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{pmatrix}f_{i2}\\ f_{i3}\\ f_{i4}\end{pmatrix} = A_j\begin{pmatrix}f_{i2}\\ f_{i3}\\ f_{i4}\end{pmatrix} \quad , \quad A_j = \begin{pmatrix}\alpha_2^{ij} & \alpha_3^{ij} & \alpha_4^{ij}\\ \alpha_2^{ij} & \alpha_3^{ij} & \alpha_4^{ij}\\ \alpha_2^{ij} & \alpha_3^{ij} & \alpha_4^{ij}\end{pmatrix}$$

□

4.4 Matrice différentielle

Proposition 4.3. *Si f est élément de $\mathcal{N}$, F étant sa matrice différentielle, il existe une matrice carrée d'ordre trois M_f, à coefficients constants et orthogonale telle que* $\epsilon = \dfrac{f_{11}}{|f_{11}|}$,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M_f & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{12} & \epsilon\sqrt{\mu} + \dfrac{f_{12}^2}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{13}f_{12}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{14}f_{12}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} \\ f_{13} & \dfrac{f_{12}f_{13}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \epsilon\sqrt{\mu} + \dfrac{f_{13}^2}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{14}f_{13}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} \\ f_{14} & \dfrac{f_{12}f_{14}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{13}f_{14}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \epsilon\sqrt{\mu} + \dfrac{f_{14}^2}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} \end{pmatrix}$$

Démonstration. En effet, il résulte de la formule 21 et de la proposition qui précède

$$\sum_{k=2}^{4} f_{ki}^2 = f_{1i}^2 + \mu \ , \ \sum_{k=2}^{4} f_{ki}f_{kj} = f_{1i}f_{1j} \ , \ f_{i1} = \sum_{k=2}^{4} \frac{f_{1k}}{f_{11}} f_{ik} \ , \ \mu = f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2 > 0$$

Supposons $f_{11} > 0$. On vérifie qu'une solution est définie par le système, $1 \leq i \neq j \leq 4$,

$$f_{ii} = \frac{\mu + f_{11}\sqrt{\mu} + f_{1i}^2}{f_{11}+\sqrt{\mu}} = \sqrt{\mu} + \frac{f_{1i}^2}{f_{11}+\sqrt{\mu}} \ , \ f_{ij} = \frac{f_{1i}f_{1j}}{f_{11}+\sqrt{\mu}} \ , \ f_{i1} = f_{1i}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{4} f_{k2}^2 &= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{(\mu + f_{11}\sqrt{\mu} + f_{12}^2)^2 + (f_{12}f_{13})^2 + (f_{12}f_{14})^2\right\} \\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{(\mu^2 + f_{11}^2\mu + f_{12}^4 + 2f_{11}\mu\sqrt{\mu} + 2f_{11}f_{12}^2\sqrt{\mu} + 2f_{12}^2\mu + f_{12}^2f_{13}^2 + f_{12}^2f_{14}^2\right\} \\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{f_{12}^2(f_{12}^2 + f_{13}^2 + f_{14}^2 + 2f_{11}\sqrt{\mu} + 2\mu) + f_{11}^2\mu + \mu^2 + 2f_{11}\mu\sqrt{\mu}\right\} \\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{f_{12}^2(f_{11}^2 - \mu + 2f_{11}\sqrt{\mu} + 2\mu) + \mu(f_{11}^2 + \mu + 2f_{11}\sqrt{\mu})\right\} \\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{f_{12}^2(f_{11}+\sqrt{\mu})^2 + \mu(f_{11}+\sqrt{\mu})^2\right\} \\
&= f_{12}^2 + \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{4} f_{k2}f_{k3} &= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{(\mu + f_{11}\sqrt{\mu} + f_{12}^2)(f_{12}f_{13}) + (\mu + f_{11}\sqrt{\mu} + f_{13}^2)(f_{12}f_{13}) + f_{12}f_{13}f_{14}^2\right\} \\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{(2\mu + 2f_{11}\sqrt{\mu} + f_{12}^2 + f_{13}^2 + f_{14}^2)\right\} f_{12}f_{13} \\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{(2\mu + 2f_{11}\sqrt{\mu} + f_{11}^2 - \mu)\right\} f_{12}f_{13} \\
&= f_{12}f_{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{21} &= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})}\left\{\frac{f_{12}}{f_{11}}(\mu+f_{11}\sqrt{\mu}+f_{12}^2)+\frac{f_{13}}{f_{11}}(f_{12}f_{13})+\frac{f_{14}}{f_{11}}(f_{12}f_{14})\right\} \\ &= \frac{f_{12}}{f_{11}(f_{11}+\sqrt{\mu})}\left\{(\mu+f_{11}\sqrt{\mu}+f_{12}^2+f_{13}^2+f_{14}^2)\right\} \\ &= \frac{f_{12}}{f_{11}(f_{11}+\sqrt{\mu})}\left\{(\mu+f_{11}\sqrt{\mu}+f_{11}^2-\mu)\right\} \\ &= f_{12} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on verra au paragraphe suivant que si g et h sont deux éléments de $\mathcal{N}$ tels qu'on ait la relation

$$h_1 = \lambda g_1 + \eta \ , \ (\lambda,\eta) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \lambda \neq 0$$

alors il existe une matrice carrée et orthogonale d'ordre trois M, à coefficients constants, telle que G et H étant les matrices différentielles de g et h, on ait l'égalité

$$HG^{-1} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathrm{M} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Ainsi, le signe de f_{11} pouvant être négatif, si g est un élément de $\mathcal{N}$ tel que $g_1 = \dfrac{f_{11}}{|f_{11}|} = \epsilon f_1$, sa matrice différentielle étant déterminée par les formules explicites ci-dessus, il existe une matrice scalaire orthogonale M telle que

$$F = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathrm{M}_f & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon f_{11} & \epsilon f_{12} & \epsilon f_{13} & \epsilon f_{14} \\ \epsilon f_{12} & \sqrt{\mu}+\dfrac{f_{12}^2}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{13}f_{12}}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{14}f_{12}}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} \\ \epsilon f_{13} & \dfrac{f_{12}f_{13}}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} & \sqrt{\mu}+\dfrac{f_{13}^2}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{14}f_{13}}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} \\ \epsilon f_{14} & \dfrac{f_{12}f_{14}}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{13}f_{14}}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} & \sqrt{\mu}+\dfrac{f_{14}^2}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} \end{pmatrix}$$

□

Le calcul donne

$$F^{-1} = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} f_{11} & -f_{12} & -f_{13} & -f_{14} \\ -f_{12} & \epsilon\sqrt{\mu}+\dfrac{f_{12}^2}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{13}f_{12}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{14}f_{12}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} \\ -f_{13} & \dfrac{f_{12}f_{13}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \epsilon\sqrt{\mu}+\dfrac{f_{13}^2}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{14}f_{13}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} \\ -f_{14} & \dfrac{f_{12}f_{14}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{13}f_{14}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \epsilon\sqrt{\mu}+\dfrac{f_{14}^2}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathrm{M}_f^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

On peut noter

$$\bar{\nabla} f_1 = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{pmatrix}$$

Sachant que $M_f^{-1} = M_f^t$, il vient, $\forall\ x \in \mathbb{R}^4$, $<,>$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$,

$$F(x) = F_x\left(M_f, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \bar{\nabla} f_1\right)\ ,\ F^{-1}\left(f(x)\right) = F_x\left(M_f^{-1}, \frac{1}{\mu_f}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, -\frac{1}{\mu_f} M_f \bar{\nabla} f_1\right) \tag{23}$$

$$\mu_f = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 - < \bar{\nabla} f_1, \bar{\nabla} f_1 >$$

4.5 Notion de referentiel

La définition 2.2 peut s'énoncer ainsi :

Définition 4.1. *Deux systèmes de coordonnées cartésiens S et S', relatifs à des bases orthonormées de l'espace, appartiennent au même referentiel si et seulement si il existe un nombre réel α tel que, quelques soient les évènements a et b,*

$$\pi_1^{s'}(b) - \pi_1^{s'}(a) = \alpha(\pi_1^s(b) - \pi_1^s(a))\ \ ,\ \ \sum_{i=2}^{4}(\pi_i^{s'}(b) - \pi_i^{s'}(a))^2 = \alpha^2 \sum_{i=2}^{4}(\pi_i^s(b) - \pi_i^s(a))^2$$

Définition 4.2. *Une transformation admissible f sera dite interne si et seulement si il existe deux systèmes de coordonnées cartésiens S et S', relatifs à des bases orthonormées de l'espace et appartenant au même referentiel, tels que $f = S' \circ S^{-1}$.*

Proposition 4.4. *Une transformation admissible f est interne si et seulement si, F étant sa matrice différentielle, il existe une matrice scalaire orthogonale M_f et un nombre réel λ tels que*

$$F = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M_f & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Démonstration. Par définition, il existe un réel non nul λ tel que, quelque soient x et Δx,

$$f_1(x + \Delta x) - f_1(x) = \lambda\ \Delta x_1\ \ ,\ \ \sum_{i=2}^{4}(f_i(x + \Delta x) - f_i(x))^2 = \lambda^2\ \sum_{i=2}^{4}(\Delta x_i)^2 \tag{24}$$

D'après la formule de taylor-Lagrange, il existe τ élément de $]0, 1[$ tel que, $1 \leq l \leq 4$,

$$f_l(x + \Delta x) - f_l(x) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(x)\Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq 4} \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_i \partial x_j}(x + \tau\Delta x)\Delta x_i \Delta x_j$$

Nécessairement, f_1 étant vue comme une fonction de Δx, $\forall\ x \in \mathbb{R}^4$, $2 \leq i \leq 4$, on a les égalités

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = \lambda\ ,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) = 0$$

La proposition 4.3 permet de conclure. □

Il résulte de la preuve de cette proposition, parceque seule la première des équations 24 est nécessaire, que deux horloges appartiennent au même referentiel si et seulement si elles permettent de mesurer, au choix de l'unité près, les mêmes intervalles de temps entre deux quelconques évènements. Ce résultat dépend de la définition 2.2 et par conséquent peut s'énoncer sous forme de postulat.

Postulat 12. *Deux systèmes de coordonnées S et S' appartiennent au même referentiel si et seulement si il existe un réel α tel que, quelque soient les évènements a et b, on ait la relation*

$$\pi_1^{s'}(b) - \pi_1^{s'}(a) = \alpha(\pi_1^s(b) - \pi_1^s(a))$$

Proposition 4.5. *Une transformation admissible f est interne si et seulement si il existe un réel non nul λ tel que, F étant sa matrice différentielle, $F^tF = \lambda^2 I$.*

Démonstration. En notant $F^tF(i,j)$ l'élément de la ligne i et de la colonne j de F^tF, il résulte de la formule 21

$$F^tF(1,1) - \sum_{k=2}^{4} F^tF(k,k) = -2\mu = -2\left(f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2\right)$$

Par ailleurs, la relation $F^tF = \lambda^2 I$ permet d'établir

$$F^tF(1,1) - \sum_{k=2}^{4} F^tF(k,k) = -2\lambda^2$$

Il résulte

$$f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2 = \lambda^2 \quad , \quad F^tF = \lambda^2 J + 2\left(f_{1i}f_{1j}\right)_{i,j} = \lambda^2 I$$

$$2f_{11}^2 - \lambda^2 = \lambda^2 \quad , \quad 2f_{1i}^2 + \lambda^2 = \lambda^2 \quad (i \neq 1) \quad , \quad 2f_{1i}f_{1j} \quad (i \neq j)$$

Il vient

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^4 \ , \ 2 \leq i \leq 4 \ , f_{11}^2(x) = \lambda^2 \ , \ f_{1i}^2(x) = 0$$

La proposition 4.3 permet de conclure. □

Définition 4.3. *Deux transformations admissibles f et g sont équivalentes si $f \circ g^{-1}$ est interne.*

Si S est un système de coordonnées relatif à une base orthonormée de l'espace, f et g deux transformations admissibles équivalentes, alors les systèmes de coordonnées $f \circ S$ et $g \circ S$ appartiennent au même referentiel. La proposition suivante est une conséquence du postulat 12 :

Proposition 4.6. *Deux transformations admissibles f et g sont équivalentes si et seulement si il existe un réel non nul λ et un réel η tels que $f_1 = \lambda g_1 + \eta$*

Démonstration. Si $f_1 = \lambda g_1 + \eta$, alors $f_{1i} = \lambda g_{1i}$, $1 \leq i \leq 4$. Il résulte de la formule 21 la relation $F^tF = \lambda^2 G^tG$. On peut écrire

$$(FG^{-1})^t(FG^{-1}) = (G^{-1})^t(F^tF)G^{-1} = \lambda^2 I$$

Il apparait que $f \circ g^{-1}$, dont la matrice différentielle est FG^{-1}, est une transformation interne. Réciproquement, si $f \circ g^{-1}$ est interne, il résulte de la forme de sa matrice les relations $f_{1i} = \lambda g_{1i}$, $1 \leq i \leq 4$. □

5 Géométrie

Postulat 13. *Relativement à un quelconque observateur, l'espace physique est euclidien.*

Définition 5.1. *Deux systèmes de coordonnées S et S' sont compatibles si et seulement si $S' \circ S^{-1}$ est une transformation admissible. Un espace-temps est un ensemble de systèmes de coordonnées compatibles. Un observateur est un système de coordonnées cartésien relatif à une base orthonormée de l'espace, pouvant être constaté par un physicien effectuant des mesures. Le référentiel d'un observateur S est l'ensemble des applications $f \circ S$, f décrivant l'ensemble des transformations admissibles interne.*

Postulat 14. *Un observateur est un système de coordonnées S munit d'un espace vectoriel réel mesuré et orienté de dimension trois $(\mathcal{V}_s, \mathcal{B}_s)$. Le vecteur d'espace défini par le couple d'évènements (a, b), relativement à l'observateur S, est l'élément de $\mathcal{V}_s$ ayant pour coordonnées $\pi_p^s(b) - \pi_p^s(a)$ dans la base $\mathcal{B}_s$.*

Ce postulat incite à penser qu'un seul espace-temps est réalisé dans la nature cependant, parce que c'est mathématiquement possible, il est approprié de construire une théorie indépendante de ce choix.

5.1 Relation entre $\mathcal{V}_s$ et $\mathcal{V}_{s'}$

S et S' étant deux observateurs compatibles, il est possible d'établir une relation entre $\mathcal{V}_s$ et $\mathcal{V}_{s'}$. Tout élément de $\mathcal{V}_{s'}$ est défini par un bipoint (M', N') de l'espace physique affine de S'. Géométriquement, ce vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ est représenté pour un physicien $\mathcal{P}'$ constatant S' par un segment de droite immobile ayant ces points pour extrémités. Pour un physicien $\mathcal{P}$ constatant S, la représentation faite par $\mathcal{P}'$ est un segment de courbe en mouvement qui a pour extrémités les points mobiles M' et N'. On note $\varphi_{s'}(.,.)$ l'application qui définie la direction de l'espace physique affine de S', $\varphi_{s'}(M', N') = \overrightarrow{M'N'}$, $\mathcal{B}_s = (\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, $\mathcal{B}_{s'} = (\vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'_4)$, $f = S' \circ S^{-1}$ et I_{τ_0} l'application définie sur $\mathcal{V}_s$ et à valeurs dans $\mathcal{V}_{s'}$ par la relation, $\tau_0 \in \mathbb{R}$,

$$x\vec{e}_2 + y\vec{e}_3 + z\vec{e}_4 \longmapsto f_2(\tau_0, x, y, z)\vec{e}'_2 + f_3(\tau_0, x, y, z)\vec{e}'_3 + f_4(\tau_0, x, y, z)\vec{e}'_4$$

I_{τ_0} est logiquement une bijection. En effet, O_s étant l'origine du repère cartésien S, l'ensemble des évènements associés à la date $\dfrac{\tau_0}{c}$ permettent de définir entièrement son espace physique, chaque point M étant identifié par $\vec{r} = \varphi_s(O_s, M)$. Dans S', ces évènements qui ne sont pas simultanés permettent de définir entièrement l'espace, M' étant identifié par le vecteur

$$I_{\tau_0}\{\varphi_s(O_s, M'(\tau_0))\} = \varphi_{s'}(O_{s'}, M')$$

Si M' et N' sont deux points de l'espace de S', $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, il vient

$$I_{\tau_0}^{-1}\{\alpha\varphi_{s'}(O_{s'}, M') + \beta\varphi_{s'}(O_{s'}, N')\} = I_{\tau_0}^{-1}\{\varphi_{s'}(O_{s'}, H')\} = \varphi_s(O_s, H'(\tau_0))$$

Cette équation est complétée par la relation de Chasles

$$\varphi_{s'}(M', N') = \varphi_{s'}(O_{s'}, N') - \varphi_{s'}(O_{s'}, M')$$

5.2 Mouvement dans S d'un point matériel immobile dans S'

S et S' étant deux observateurs compatibles, on note $f = S' \circ S^{-1}$, $f_1 = f_1(ct,x,y,z) = f_1(ct,\tilde{r})$, $\vec{\nabla} f_1(ct,\tilde{r})$ l'élément de $\mathcal{V}_s$ ayant pour coordonnées $(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z})(ct,\tilde{r})$ dans la base $\mathcal{B}_s$, $ct = \tau$. Considérons un point matériel M'_j immobile dans S' et de coordonnées $\tilde{r}_j = (x'_j, y'_j, z'_j)$. S'il s'agit d'une horloge, elle indique des dates $t' = t'(M'_j)$. On note $\tilde{r}_j(\tau) = (x_j(\tau), y_j(\tau), z_j(\tau))$ ses coordonnées dans S : ce sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_s$ de l'élément $\varphi_s(O_s, M'_j(\tau))$ de $\mathcal{V}_s$. On peut écrire

$$\tau'(M'_j(\tau)) = f_1(\tau, \tilde{r}_j(\tau)) \quad , \quad \frac{dx'_j}{d\tau}\vec{e}'_2 + \frac{dy'_j}{d\tau}\vec{e}'_3 + \frac{dz'_j}{d\tau}\vec{e}'_4 = \vec{0}$$

La proposition 4.3 permet d'écrire, $\tilde{r}_j = M'_j$,

$$\vec{\nabla} f_1 + \epsilon\sqrt{\mu}\ \frac{d}{d\tau}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_j(\tau)) + < \vec{\nabla} f_1, \frac{d}{d\tau}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_j(\tau)) >_s \ \frac{\vec{\nabla} f_1}{f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu}} = \vec{0}$$

$$\left(\vec{\nabla} f_1 + f_{11}\frac{d}{d\tau}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_j(\tau))\right)(f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu}) + \vec{\nabla} f_1 \wedge \left(\vec{\nabla} f_1 \wedge \frac{d}{d\tau}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_j(\tau))\right) = \vec{0}$$

$\wedge$ étant le produit vectoriel relatif à $\mathcal{B}_s$. En effectuant le produit scalaire de chaque membre de cette égalité par $\vec{\nabla} f_1$, il vient

$$< \vec{\nabla} f_1, \frac{d}{d\tau}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_j(\tau)) >_s = \frac{-1}{f_{11}} < \vec{\nabla} f_1, \vec{\nabla} f_1 >_s = \frac{\mu - f_{11}^2}{f_{11}}$$

Il résulte alors de l'équation initiale

$$\frac{d}{d\tau}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_j(\tau)) = \frac{-1}{f_{11}}\vec{\nabla} f_1$$

En conclusion, M'_j, point de l'espace de S', est l'élément $\tilde{r}_j$ de $(\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}}$ déterminé par les relations

$$\frac{d}{d\tau}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_j(\tau)) = \frac{-1}{f_{11}(\tau, \tilde{r}_j(\tau))}\vec{\nabla} f_1(\tau, \tilde{r}_j(\tau)) \quad , \quad \tilde{r}_j(\tau_0) = \tilde{r}_j^0 \quad , \quad \tau_0 \in \mathbb{R} \tag{25}$$

Sachant que $f_{11}^2 - < \vec{\nabla} f_1, \vec{\nabla} f_1 >_s$ est strictement positif pour toute transformation admissible, la norme de la vitesse dans S d'un point matériel M_i immobile dans S', dont le carré vaut

$$c^2 \times < \frac{d}{d\tau}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_i(\tau)), \frac{d}{d\tau}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_i(\tau)) >_s$$

est à tout instant stritement inférieur à c. On note $\mathcal{M}_{s',s}$ le sous ensemble de $(\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}}$ qui est l'ensemble des points de l'espace de S'. Chacun de ses éléments est décrit par les relations 25 et ils sont distingués par la condition initiale lorsqu'on fait le choix d'une date $\frac{\tau_0}{c}$.

5.3 Géométrie des droites en mouvement

On reprend les notations du paragraphe qui précède. Si $O_{s'} = \tilde{r}_0$, une des représentations vectorielles les plus simples d'une droite $\mathcal{D}'$ de S' est

$$\varphi_{s'}(\tilde{r}_0, \tilde{r}_\eta) = \eta\ \vec{e}' + \varphi_{s'}(\tilde{r}_0, \tilde{r}_{\eta_0}) \quad , \quad \eta \in \mathbb{R} \quad , \quad (\vec{e}', \varphi_{s'}(\tilde{r}_0, \tilde{r}_{\eta_0})) \in \mathcal{V}_{s'}^2 \tag{26}$$

Considérons n phénomènes qui se produisent aux points $\mathcal{O}_n = \{\eta_i, 1 \leq i \leq n\}$ de $\mathcal{D}'$. Ils se produisent aux évènements décrits dans S par

$$\{(\tau(\eta_i), \tilde{r}_{\eta_i}(\tau(\eta_i))), 1 \leq i \leq n\}$$

et dans S' par

$$\{f(\tau(\eta_i), \tilde{r}_{\eta_i}(\tau(\eta_i))), 1 \leq i \leq n\} = \{(\tau'(\eta_i), \tilde{r}_{\eta_i}), 1 \leq i \leq n\}$$

Les expressions

$$\frac{\varphi_s(O_s, \tilde{r}_{\eta_i}(\tau(\eta_i))) - \varphi_s(O_s, \tilde{r}_{\eta_j}(\tau(\eta_j)))}{\eta_i - \eta_j} \ , \ \frac{\varphi_{s'}(\tilde{r}_0, \tilde{r}_{\eta_i}) - \varphi_{s'}(\tilde{r}_0, \tilde{r}_{\eta_j})}{\eta_i - \eta_j} \ , \ (\eta_i, \eta_j) \in \mathcal{O}_n^2 \ , \ i \neq j$$

ont un sens et définissent des éléments de $\mathcal{V}_s$ et $\mathcal{V}_{s'}$. Le réel η_i peut être utilisé pour désigner non plus un point de $\mathcal{D}'$ mais le phénomène qui s'y produit et en substituant à $\mathcal{O}_n$ un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$, la proposition 4.3 permet d'écrire

$$\frac{d\tau'}{d\eta} = f_{11}\frac{d\tau}{d\eta} + < \vec{\nabla} f_1, \frac{d}{d\eta}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_\eta(\tau(\eta))) >_s \quad , \quad \epsilon = \frac{f_{11}}{|f_{11}|}$$

$$A_{s',s}\ \frac{d}{d\eta}\varphi_{s'}(\tilde{r}_0, \tilde{r}_\eta) = \epsilon\pi_{s',s}\left(\frac{d\tau}{d\eta}\vec{\nabla} f_1 + \epsilon\sqrt{\mu}\ \frac{d}{d\eta}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_\eta(\tau(\eta))) + < \vec{\nabla} f_1, \frac{d}{d\eta}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_\eta(\tau(\eta))) >_s \frac{\vec{\nabla} f_1}{f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu}}\right)$$

$\pi_{s',s}$ est la bijection linéaire définie sur $\mathcal{V}_s$ et à valeurs dans $\mathcal{V}_{s'}$ par la relation

$$\pi_{s',s}\left(x\vec{e}_2 + y\vec{e}_3 + z\vec{e}_4\right) = x'\vec{e}'_2 + y'\vec{e}'_3 + z'\vec{e}'_4$$

$A_{s',s}$ est l'isométrie de $\mathcal{V}_{s'}$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}_s$ est ϵM_f^{-1}. Ces relations restent exactes si on substitue à η, variable permettant d'identifier un phénomène, la variable $h(\eta)$ où h est une quelconque fonction bijective et dérivable. Si ces phénomènes se produisent simultanément dans S et sur la droite $\mathcal{D}'$ de S', alors

$$\frac{d\tau}{d\eta} = 0 \quad , \quad \frac{d}{d\eta}\varphi_{s'}(\tilde{r}_0, \tilde{r}_\eta) = \vec{e}'$$

Il vient, en notant $\epsilon\pi_{s,s'}\left(A_{s',s}\ \vec{e}'\right) = \vec{e}$, $\wedge$ étant le produit vectoriel relatif à $\mathcal{B}_s$,

$$\frac{d\tau'}{d\eta} = < \vec{\nabla} f_1, \frac{d}{d\eta}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_\eta(\tau)) >_s$$

$$\vec{e}(f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu}) = f_{11}(f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu})\ \frac{d}{d\eta}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_\eta(\tau)) + \vec{\nabla} f_1 \wedge (\vec{\nabla} f_1 \wedge \frac{d}{d\eta}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_\eta(\tau)))$$

En effectuant le produit scalaire de chaque membre de cette dernière égalité par $\vec{\nabla} f_1$, il vient

$$< \vec{\nabla} f_1, \frac{d}{d\eta}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_\eta(\tau)) >_s = \frac{1}{f_{11}} < \vec{\nabla} f_1, \vec{e} >_s$$

Il résulte alors

$$\frac{d}{d\eta}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_\eta(\tau)) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\mu}}\left(\vec{e} - < \vec{\nabla} f_1, \vec{e} >_s \frac{\vec{\nabla} f_1}{f_{11}(f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu})}\right) \tag{27}$$

f_{11} et $\vec{\nabla} f_1$ étant évalués en $(\tau, \tilde{r}_\eta(\tau))$. C'est l'équation dans S, à la date $\frac{\tau}{c}$, d'une droite ou d'un segment de droite de S' dirigé par $\epsilon A_{s',s}^{-1}(\pi_{s',s}\vec{e})$. On doit lui associer la relation 25 qui s'écrit

$$\frac{d}{d\tau}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_\eta(\tau)) = \frac{-1}{f_{11}(\tau, \tilde{r}_\eta(\tau))}\vec{\nabla} f_1(\tau, \tilde{r}_\eta(\tau)) \quad , \quad \tilde{r}_\eta(\tau_0) = \tilde{r}_\eta^0 \quad , \quad \tau_0 \in \mathbb{R}$$

Remarque 5.1. *Si S' est en translation uniforme dans S, alors f_1 est une fonction affine par conséquent $\frac{d}{d\eta}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_\eta(\tau))$ ne dépend pas de la variable η. On peut conclure que la représentation d'un segment de droite dans S' parait dans S, à chaque instant, comme étant un segment de droite.*

5.4 Le mouvement de translation uniforme

Il est évident que l'ensemble des transformations admissibles dont les matrices différentielles sont à coefficients constants forment un sous groupe de $\mathcal{N}$. Chacun de ses éléments décrit un mouvement de translation uniforme d'après la relation 25. S et S' étant deux observateurs compatibles tels que la fonction génératrice de $f = S' \circ S^{-1}$ soit affine, on peut noter

$$\vec{v} = -\frac{1}{f_{11}}\vec{\nabla} f_1 \quad , \quad \vec{v} \in \mathcal{V}_s$$

La proposition 4.3 permet d'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathrm{M}_f^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{12} & & & \\ f_{13} & & \cdots & \\ f_{14} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_\tau \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

Si $\tilde{r}_i \in \mathcal{M}_{s',s}$, $\gamma^2 = \frac{f_{11}^2}{\mu}$, il vient

$$\begin{aligned} A_{s',s}(\varphi_{s'}(\tilde{r}, \tilde{r}_i)) &= A_{s',s}\{I_{\tau_0}(\varphi_s(O_s, \tilde{r}_i(\tau_0)))\} \\ &= \epsilon\pi_{s',s}\left\{\tau_0\vec{\nabla} f_1 + \epsilon\sqrt{\mu}\ \varphi_s(O_s, \tilde{r}_i(\tau_0)) + < \vec{\nabla} f_1, \varphi_s(O_s, \tilde{r}_i(\tau_0)) >_s \frac{\vec{\nabla} f_1}{f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu}} + \vec{k}\right\} \\ &= \epsilon\pi_{s',s}\left\{-\tau_0 f_{11}\vec{v} + \epsilon\sqrt{\mu}\ \varphi_s(O_s, \tilde{r}_i(\tau_0)) + f_{11}^2 < \vec{v}, \varphi_s(O_s, \tilde{r}_i(\tau_0)) >_s \frac{\vec{v}}{f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu}} + \vec{k}\right\} \\ &= \epsilon\pi_{s',s}\left\{f_{11}\left(-\tau_0\vec{v} + \gamma^{-1}\varphi_s(O_s, \tilde{r}_i(\tau_0)) + < \vec{v}, \varphi_s(O_s, \tilde{r}_i(\tau_0)) >_s \frac{\gamma\vec{v}}{1+\gamma}\right) + \vec{k}\right\} \end{aligned}$$

Si $\tilde{r}_j \in \mathcal{M}_{s',s}$, alors $\varphi_{s'}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j) = \varphi_{s'}(\tilde{r}, \tilde{r}_j) - \varphi_{s'}(\tilde{r}, \tilde{r}_i)$ et il vient

$$A_{s',s}(\varphi_{s'}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)) = \epsilon\pi_{s',s}\left\{f_{11}\left(\gamma^{-1}\varphi_s(\tilde{r}_i(\tau_0), \tilde{r}_j(\tau_0)) + < \vec{v}, \varphi_s(\tilde{r}_i(\tau_0), \tilde{r}_j(\tau_0)) >_s \frac{\gamma\vec{v}}{1+\gamma}\right)\right\}$$

Par définition de $\pi_{s',s}$,

$$< \pi_{s',s}(\vec{u}), \pi_{s',s}(\vec{v}) >_{s'} = < \vec{u}, \vec{v} >_s \quad , \quad \forall\ (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}_s^2$$

Il vient la formule, en remarquant que $\gamma^2 < \vec{v}, \vec{v} >_s = \gamma^2 - 1$, $\forall\ \tilde{r}_l \in \mathcal{M}_{s',s}$,

$$\begin{aligned} < \varphi_{s'}(\tilde{r}_l, \tilde{r}_i), \varphi_{s'}(\tilde{r}_l, \tilde{r}_j) >_{s'} &= \gamma^{-2} f_{11}^2 < \varphi_s(\tilde{r}_l(\tau_0), \tilde{r}_i(\tau_0)), \varphi_s(\tilde{r}_l(\tau_0), \tilde{r}_j(\tau_0)) >_s \\ &+ f_{11}^2 < \vec{v}, \varphi_s(\tilde{r}_l(\tau_0), \tilde{r}_i(\tau_0)) >_s < \vec{v}, \varphi_s(\tilde{r}_l(\tau_0), \tilde{r}_j(\tau_0)) >_s \end{aligned}$$

Les étalons des longueurs sont identiques pour S et S' si $|f_{11}| = \gamma$: si le vecteur d'espace $\vec{r}$ de $\mathcal{V}_s$ défini par deux évènements choisis simultanés a et b appartient au plan vectoriel orthogonal à $\vec{v}$, alors dans S', ces évènements sont simultanés, définissent un vecteur d'espace $\vec{r}'$ et on doit avoir la relation

$$< \vec{r}', \vec{r}' >_{s'} = < \vec{r}, \vec{r} >_s$$

Dans cette situation, les étalons des intervalles de temps sont identiques si la vitesse d'une sphère électrique est la même dans S et dans S'. Par ailleurs, l'espace de S' parait dilaté dans la direction du mouvement puisque, $\varphi_s(\tilde{r}_l(\tau_0), \tilde{r}_i(\tau_0))$ étant choisi colinéaire à $\vec{v}$,

$$< \varphi_{s'}(\tilde{r}_l, \tilde{r}_i), \varphi_{s'}(\tilde{r}_l, \tilde{r}_i) >_{s'} = f_{11}^2 < \varphi_s(\tilde{r}_l(\tau_0), \tilde{r}_i(\tau_0)), \varphi_s(\tilde{r}_l(\tau_0), \tilde{r}_i(\tau_0)) >_s$$

De plus, les horloges de S' semble ralentir :

$$\begin{aligned} \tau'(\tau, \tilde{r}_i(\tau)) &= f_1(\tau, \tilde{r}_i(\tau)) \\ &= f_{11}\tau + < \vec{\nabla} f_1, \varphi_s(O_s, \tilde{r}_i(\tau)) >_s + k_\tau \\ &= f_{11}\tau + < -f_{11}\vec{v}, \vec{v}(\tau - \tau_0) + \varphi_s(O_s, \tilde{r}_i(\tau_0)) >_s + k_\tau \\ &= (1 - < \vec{v}, \vec{v} >_s) f_{11}\tau + \{k_\tau + f_{11} (< \vec{v}, \vec{v} >_s \tau_0 - < \vec{v}, \varphi_s(O_s, \tilde{r}_i(\tau_0)) >_s)\} \\ \tau'(\tau_2, \tilde{r}_i(\tau_2)) - \tau'(\tau_1, \tilde{r}_i(\tau_1)) &= \gamma^{-2} f_{11}\ (\tau_2 - \tau_1) \end{aligned}$$

6 Réalisation d'un referentiel

6.1 Approche naïve

On est tenté d'affirmer que deux points matériels ayant à tout instant le même vecteur vitesse dans un referentiel $\mathcal{R}$ sont immobiles dans un unique referentiel $\mathcal{R}'$. Si le vecteur d'espace constant qu'ils définissent n'est pas orthogonal à une direction $\vec{e}$ et si leur vecteur vitesse est une fonction croissante et non constante du temps, alors $\mathcal{R}'$ étant en translation uniforme dans la direction $\vec{e}$ dans $\mathcal{R}$, d'après la formule spéciale de Lorentz, leurs vecteurs vitesses ne peuvent y être simultanément égaux à toute date. En effet, l'application qui associe au vecteur vitesse $\vec{u}$ dans $\mathcal{R}$ d'un point matériel en un évènement a, son vecteur vitesse $\vec{u}'$ constaté dans $\mathcal{R}'$, ne dépend pas du choix de a. Si $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, la relation entre $\vec{u}'$ et $\vec{u}$ est donnée par l'équation 5.
Il résulte de cette analyse que les trajectoires dans $\mathcal{R}$ des entités immobiles dans $\mathcal{R}'$ ne sont pas nécessairement superposables. Toutefois, cette approche dite naïve a un sens si on suppose l'existence d'un referentiel privilégié définissant l'immobilité absolue. Sous cette hypothèse, la relation 34 devient, si S est un observateur du referentiel privilégié et S' un quelconque observateur compatible, $f = S' \circ S^{-1}$, $f_1 = f_1(\tau, x, y, z)$, $f_{11} = \dfrac{\partial f_1}{\partial \tau}$,

$$\frac{\vec{\nabla} f_1}{f_{11}}(\tau, x, y, z) = -\vec{v}_M(\tau, x, y, z)\ ,\ \forall\ (\tau, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

L'équation 36 s'écrit alors, $h = f_{11}$,

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\ (\vec{v}_M\ h) + \vec{\nabla} h = \vec{0}$$

6.2 Deuxième approche

6.2.1 Le postulat 15

Proposition 6.1. *Relativement à un quelconque référentiel, la sphère électrique crée à une date donnée par une charge M est strictement incluse dans toute sphère crée à une date antérieure et chacune d'elles ne rencontre un quelconque point matériel N qu'en un unique évènement.*

Démonstration. Pour prouver la seconde affirmation il suffit de montrer, en notant $\vec{r}_N(.)$ le vecteur d'espace défini par l'origine du repère cartésien et N, que quelque soit $\epsilon \in \{-1, 1\}$, quelques soient la date $\frac{\tau}{c}$ et le vecteur $\vec{r}_N(\tau)$, il existe un unique vecteur $\vec{\xi}(\tau, N)$ tel que

$$\vec{r}_N(\tau + \epsilon\|\vec{\xi}(\tau, N)\|) = \vec{\xi}(\tau, N) + \vec{r}_M(\tau) \tag{28}$$

En effet, le module de la vitesse moyenne (normalisée) de N entre deux dates quelconques est égale à celui de sa vitesse à une date intermédiaire d'après le théorème des accroissement finis et par conséquent est inférieur à 1. On peut écrire, si $\vec{\xi}_1(\tau, N)$ et $\vec{\xi}_2(\tau, N)$ satisfont la relation qui précède et si $\vec{\xi}_1(\tau, N) \neq \vec{\xi}_2(\tau, N)$,

$$\begin{aligned} \|\vec{\xi}_2(\tau, N) - \vec{\xi}_1(\tau, N)\| &= \|\vec{r}_N(\tau + \epsilon\|\vec{\xi}_2(\tau, N)\|) - \vec{r}_N(\tau + \epsilon\|\vec{\xi}_1(\tau, N)\|)\| \\ &< \left|\|\vec{\xi}_2(\tau, N)\| - \|\vec{\xi}_1(\tau, N)\|\right| \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\vec{\xi}_2(\tau, N) - \vec{\xi}_1(\tau, N)\| \geq \left|\|\vec{\xi}_2(\tau, N)\| - \|\vec{\xi}_1(\tau, N)\|\right|$$

Si $\|\vec{\xi}_2(\tau, N)\| = \|\vec{\xi}_1(\tau, N)\| = \|\vec{\xi}(\tau, N)\|$, alors

$$\|\vec{\xi}_2(\tau, N) - \vec{\xi}_1(\tau, N)\| = \|\vec{r}_N(\tau + \epsilon\|\vec{\xi}(\tau, N)\|) - \vec{r}_N(\tau + \epsilon\|\vec{\xi}(\tau, N)\|)\| = 0$$

La sphère électrique crée à la date $\frac{\tau}{c}$ rencontre N uniquement à la date $\frac{\tau^+}{c}$ ultérieure, $|\tau^+ - \tau|$ $= \|\vec{\xi}(\tau, N)\|$. Si la graduation de l'axe temporelle est normale alors $\tau^+ > \tau$ et sinon $\tau^+ < \tau$.
La première affirmation peut être prouvée ainsi : si deux sphère électriques émises aux dates $\frac{\tau_1}{c}$ et $\frac{\tau_2}{c}$ par M se rencontrent à une date ultérieure τ et en un point H qui défini avec l'origine du repère cartésien le vecteur $\vec{r}_H$, alors

$$\begin{aligned} |\,|\tau - \tau_1| - |\tau - \tau_2|\,| &= |\,\|\vec{r}_H - \vec{r}_M(\tau_2)\| - \|\vec{r}_H - \vec{r}_M(\tau_1)\|\,| \\ &\leq \|(\vec{r}_H - \vec{r}_M(\tau_2)) - (\vec{r}_H - \vec{r}_M(\tau_1))\| \\ &\leq \|\vec{r}_M(\tau_2) - \vec{r}_M(\tau_1)\| \\ &< |\tau_2 - \tau_1| \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité da Cauchy-Schwarz,

$$|\tau_2 - \tau_1| = |(\tau - \tau_1) - (\tau - \tau_2)| \geq |\,|\tau - \tau_1| - |\tau - \tau_2|\,|$$

□

Le postulat suivant, qui permet à une (quelconque) classe de referentiel en translation uniforme les uns par rapport aux autres de s'accorder sur la définition du referentiel d'un quelconque point matériel avec le même critère, est cohérent :

Postulat 15. *Relativement à un quelconque referentiel $\mathcal{R}$ élément d'une classe $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ de refére,tiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres, un point matériel N est immobile dans le referentiel d'un point matériel M si, en supposant que M est porteuse d'une charge, le vecteur vitesse de N à l'instant où il intercepte une sphère électrique associé à M est égal à celui de ce dernier lors de la création de la sphère.*

La trajectoire de M relativement à l'observateur S de $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ est décrite par la relation, $M(\tau)$ étant le point de l'espace où est situé M à la date $\frac{\tau}{c}$, $\vec{a}_M$ étant localement intégrable au sens de Riemann,

$$\varphi_s(O_s, M(\tau)) = \varphi_s(O_s, M(\tau_0)) + \vec{v}_0(\tau - \tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} (\tau - \alpha)\vec{a}_M(\alpha)d\alpha$$

$$\varphi_s(O_s, M(\tau)) = \varphi_s(O_s, M(\tau_0)) - \tau_0\vec{v}_0 + \tau\vec{v}_M(\tau) - \int_{\tau_0}^{\tau} \alpha\vec{a}_M(\alpha)d\alpha \ , \ \vec{v}_M(\tau) = \vec{v}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \vec{a}_M(\alpha)d\alpha$$

L'objectif étant de déduire la trajectoire de N, on s'intéresse à la relation

$$\varphi_s(O_s, M(\tau)) = \varphi_s(O_s, M(\tau_0)) + \int_{\tau_0}^{\tau} \vec{v}_M(\alpha)d\alpha$$

On suppose que la graduation de l'axe temporelle dans S est normale.

6.2.2 Desription Lagrangienne

Quelque soit le réel τ, la sphère électrique crée à la date $\frac{\tau}{c}$ et au point $M(\tau)$ rencontre N à la date $\frac{\tau^+}{c}$. On suppose dans un premier temps que $\vec{v}_M$ est étagée et on note

$$\vec{v}_M(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{v}_i 1_{[\tau_i, \tau_{i+1}[} + \vec{v}_n 1_{[\tau_n, +\infty[} \ , \ \vec{\xi} = \varphi_s(M(\tau_0), N(\tau_0^+))$$

On a la relation

$$\varphi_s(M(\tau_i), N(\tau_0^+)) = \varphi_s(M(\tau_0), N(\tau_0^+)) - \varphi_s(M(\tau_0), M(\tau_i)) = \vec{\xi} - \sum_{k=0}^{i-1} \vec{v}_k(\tau_{k+1} - \tau_k)$$

Par ailleurs, le postulat 15 permet d'établir

$$\varphi_s(N(\tau_0^+), N(\tau_i^+)) = \sum_{k=0}^{i-1} \vec{v}_k(\tau_{k+1}^+ - \tau_k^+)$$

La relation de Chasles s'écrit

$$\varphi_s(M(\tau_i), N(\tau_i^+)) = \vec{\xi} - \sum_{k=0}^{i-1} \vec{v}_k(\tau_{k+1} - \tau_k) + \sum_{k=0}^{i-1} \vec{v}_k(\tau_{k+1}^+ - \tau_k^+)$$

$i = 1$:

$$\tau_1^+ - \tau_1 = \|\overrightarrow{M(\tau_1)N(\tau_1^+)}\|_s = \|\vec{\xi} - \vec{v}_0(\tau_0^+ - \tau_0) + \vec{v}_0(\tau_1^+ - \tau_1)\|_s$$

En élévant chacun des membres de cette égalité au carré, on a à résoudre une équation de second degré par rapport à la variable $\tau_1^+ - \tau_1$ et en notant

$$\vec{u}_0 = \vec{\xi} - \vec{v}_0(\tau_0^+ - \tau_0)$$

l'unique solution positive, dont la valeur est $\|\vec{\xi}\|_s = \tau_0^+ - \tau_0$, est donnée par la relation

$$\chi(\vec{v}_0, \vec{u}_0) = \frac{< \vec{v}_0, \vec{u}_0 >_s + \sqrt{< \vec{u}_0, \vec{u}_0 >_s (1 - < \vec{v}_0, \vec{v}_0 >_s) + < \vec{v}_0, \vec{u}_0 >_s^2}}{1 - < \vec{v}_0, \vec{v}_0 >_s} \tag{29}$$

$i = 2$:

$$\tau_2^+ - \tau_2 = \|\overrightarrow{M(\tau_2)N(\tau_2^+)}\|_s = \|\vec{\xi} - \vec{v}_0(\tau_0^+ - \tau_0) - (\vec{v}_1 - \vec{v}_0)(\tau_1^+ - \tau_1) + \vec{v}_1(\tau_2^+ - \tau_2)\|_s$$

En élévant chacun des membres de cette égalité au carré, on a à résoudre une équation de second degré par rapport à la variable $\tau_2^+ - \tau_2$ et en notant

$$\vec{u}_1 = \vec{\xi} - \vec{v}_0(\tau_0^+ - \tau_0) - (\vec{v}_1 - \vec{v}_0)\chi(\vec{v}_0, \vec{u}_0)$$

l'unique solution positive est $\chi(\vec{v}_1, \vec{u}_1)$.
$i = n$:

$$\tau_n^+ - \tau_n = \|\overrightarrow{M(\tau_n)N(\tau_n^+)}\|_s = \|\vec{u}_{n-1} + \vec{v}_{n-1}(\tau_n^+ - \tau_n)\|_s \ , \ \vec{u}_{n-1} = \vec{\xi} - \vec{v}_0\|\vec{\xi}\|_s - \sum_{k=1}^{n-1}(\vec{v}_k - \vec{v}_{k-1})\chi(\vec{v}_{k-1}, \vec{u}_{k-1})$$

Il vient la solution $\tau_n^+ - \tau_n = \chi(\vec{v}_{n-1}, \vec{u}_{n-1})$.
Sachant que $\vec{v}_k = \vec{v}_M(\tau_k)$, $1 \leq k \leq n$, le théorème des accrossements finis permet d'écrire

$$\vec{v}_k - \vec{v}_{k-1} = \vec{a}_M(\alpha_{k-1})(\tau_k - \tau_{k-1}) \ , \ \vec{a}_M(\alpha_{k-1}) \in \mathcal{V}_s \ , \ \alpha_{k-1} \in]\tau_{k-1}, \tau_k[$$

On peut écrire

$$\vec{u}_i = \vec{\xi} - \vec{v}_M(\tau_0)\|\vec{\xi}\|_s - \sum_{k=1}^{i} \vec{a}_M(\alpha_{k-1})\chi\left(\vec{v}_M(\tau_{k-1}), \vec{u}_{k-1}\right)(\tau_k - \tau_{k-1}) \ , \ 1 \leq i \leq n-1$$

En notant $\vec{u}_k = \vec{u}(\vec{\xi}, \tau_k)$, si cette somme de Riemann converge vers une fonction continue,

$$\vec{u}(\vec{\xi}, \tau) = \vec{\xi} - \vec{v}_M(\tau_0)\|\vec{\xi}\|_s - \int_{\tau_0}^{\tau} \vec{a}_M(\alpha)\chi(\vec{v}_M(\alpha), \vec{u}(\vec{\xi}, \alpha))\ d\alpha \quad , \quad \tau \geq \tau_0 \tag{30}$$

$$\tau^+ - \tau = \chi(\vec{v}_M(\tau), \vec{u}(\vec{\xi}, \tau)) \quad , \quad \tau \geq \tau_0 \tag{31}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\varphi_s(O_s, N(\tau_n^+)) &= \varphi_s(O_s, M(\tau_0)) + \vec{\xi} + \sum_{k=1}^{n} \vec{v}_{k-1}(\tau_k^+ - \tau_{k-1}^+) \\
\sum_{k=1}^{n} \vec{v}_{k-1}(\tau_k^+ - \tau_{k-1}^+) &= \sum_{k=1}^{n} \vec{v}_{k-1}(\tau_k^+ - \tau_k) - \sum_{k=1}^{n} \vec{v}_{k-1}(\tau_{k-1}^+ - \tau_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \vec{v}_{k-1}(\tau_k - \tau_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \vec{v}_{k-1}\ \chi(\vec{v}_{k-1}, \vec{u}_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \vec{v}_{k-1}\ \chi(\vec{v}_{k-2}, \vec{u}_{k-2}) + \sum_{k=1}^{n} \vec{v}_{k-1}(\tau_k - \tau_{k-1}) \\
&= -\vec{v}_0(\tau_0^+ - \tau_0) + \vec{v}_{n-1}\ \chi(\vec{v}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n} \vec{v}_{k-1}(\tau_k - \tau_{k-1}) \\
&- \sum_{k=1}^{n-1} (\vec{v}_k - \vec{v}_{k-1})\ \chi(\vec{v}_{k-1}, \vec{u}_{k-1}) \\
&= -\vec{v}_0(\tau_0^+ - \tau_0) + \vec{v}_{n-1}\ \chi(\vec{v}_{n-1}, \vec{u}_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n} \vec{v}_M(\tau_{k-1})(\tau_k - \tau_{k-1}) \\
&- \sum_{k=1}^{n-1} \vec{a}_M(\alpha_{k-1})\ \chi(\vec{v}_M(\tau_{k-1}), \vec{u}(\vec{\xi}, \tau_{k-1}))(\tau_k - \tau_{k-1})
\end{aligned}$$

Il vient la formule

$$\varphi_s(O_s, N(\tau_n^+)) = \varphi_s(O_s, M(\tau_0)) + \vec{\xi} - \vec{v}_M(\tau_0)\|\vec{\xi}\| + \vec{v}_M(\tau)(\tau^+ - \tau) - \int_{\tau_0}^{\tau} \vec{a}_M(\alpha)\ \chi(\vec{v}_M(\alpha), \vec{u}(\vec{\xi}, \alpha))d\alpha + \int_{\tau_0}^{\tau} \vec{v}_M(\alpha)d\alpha$$

$$\varphi_s(O_s, N(\tau^+)) = \varphi_s(O_s, M(\tau)) + \vec{v}_M(\tau)(\tau^+ - \tau) + \vec{u}(\vec{\xi}, \tau)\ ,\ \tau \geq \tau_0 \tag{32}$$

6.2.3 Description Eulérienne

O étant un point de l'espace de S, on s'intéresse à l'élément ϕ_M de $(\mathcal{V}_s)^{\mathbb{R}}$ qui associe à ς le vecteur vitesse normalisé d'un point matériel qui continûment immobile dans le referentiel de M et qui se trouve en O à la date $\dfrac{\varsigma}{c}$. D'après le postulat 15, on a la relation

$$\phi_M(\tau + \|\overrightarrow{M(\tau)O}\|_s) = \vec{v}_M(\tau)\ ,\ \forall\ \tau \in \mathbb{R} \tag{33}$$

L'application $\varsigma(\tau, O) \longmapsto \tau + \|\overrightarrow{M(\tau)O}\|_s$ est une fonction strictement croissante de la variable τ. En effet,

$$\overrightarrow{M(\tau)O} = \overrightarrow{M(\tau_0)O} - \overrightarrow{M(\tau_0)M(\tau)} = \vec{\xi}(O) - \int_{\tau_0}^{\tau} \vec{v}_M(\alpha)\ d\alpha$$

$$\frac{d}{d\tau}\varsigma(\tau, O) = 1 + \frac{1}{\|\overrightarrow{M(\tau)O}\|_s} < \frac{d}{d\tau}\overrightarrow{M(\tau)O}, \overrightarrow{M(\tau)O} >_s = 1 - \frac{1}{\|\overrightarrow{M(\tau)O}\|_s} < \vec{v}_M(\tau), \overrightarrow{M(\tau)O} >_s$$

$$0 < \frac{d}{d\tau}\varsigma(\tau, O) < 2$$

On peut alors noter

$$\varsigma^{-1}(\sigma, O) = \inf\{\tau, \tau + \|\overrightarrow{M(\tau)O}\|_s \geq \sigma\}\ ,\ \forall\ \sigma \in \mathbb{R}$$

Soient (x,y,z) et $(x(\tau),y(\tau),z(\tau))$ les coordonnées de O et $M(\tau)$ dans S, S' un observateur du referentiel de M qui est compatible à S, $f=S'\circ S^{-1}$, $f_1=f_1(\sigma,x,y,z)$ sa fonction génératrice. L'équation 25 s'écrit, $\forall\ (\tau,x,y,z)\in\mathbb{R}^4$, $f_{11}=\dfrac{\partial f_1}{\partial\sigma}$,

$$-\frac{\vec{\nabla}f_1}{f_{11}}(\tau+\sqrt{(x-x(\tau))^2+(y-y(\tau))^2+(z-z(\tau))^2},x,y,z)=\phi_M(\tau+\|\overrightarrow{M(\tau)O}\|_s)=\vec{v}_M(\tau)$$

Il vient

$$\frac{\vec{\nabla}f_1}{f_{11}}(\sigma,x,y,z)=-\vec{v}_M(\varsigma^{-1}(\sigma,x,y,z))\ ,\ \forall\ (\sigma,x,y,z)\in\mathbb{R}^4 \tag{34}$$

6.3 Fonctions génératrices admissibles

L'équation 34 permet d'affirmer que f_1 est entièrement déterminée par un réel $f_1(\sigma_0,x_0,y_0,z_0)$ et la fonction

$$(\sigma,x,y,z)\ \longmapsto\ \frac{\partial f_1}{\partial\sigma}(\sigma,x,y,z)$$

Postulat 16. *Si S et S' sont deux observateurs tels que $S'\circ S^{-1}$ soit une transformation admissible, alors ses dérivées partielles du second ordre existent en tout point et sont continues.*

On peut écrire

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right)=\frac{\partial}{\partial\sigma}\vec{\nabla}f_1=-\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\vec{v}_M(\varsigma^{-1})\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right)\vec{v}_M(\varsigma^{-1})+\vec{\nabla}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right)\ \frac{d}{d\sigma}\left(\vec{v}_M(\varsigma^{-1})\right)=\vec{0} \tag{35}$$

On peut noter

$$\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\left(\varsigma(\tau,x,y,z),x,y,z\right)=h(\tau,x,y,z)\ ,\ \varphi_s(M(\tau),O)=\vec{r}(\tau)$$

Il vient la relation

$$d\varsigma=d\tau+\frac{<d\vec{r}(\tau),\vec{r}(\tau)>_s}{\|\vec{r}(\tau)\|_s}=d\tau+\frac{<\delta\vec{r}-\vec{v}_M(\tau)d\tau,\vec{r}(\tau)>_s}{\|\vec{r}(\tau)\|_s}$$

Les variables σ, x, y et z doivent être indépendantes lors de la différentiation de $\dfrac{\partial f_1}{\partial\sigma}$ et on peut écrire

$$\delta\vec{r}=\vec{0}\ \Rightarrow\ d\varsigma=(1-\frac{<\vec{v}_M(\tau),\vec{r}(\tau)>_s}{\|\vec{r}(\tau)\|_s})\ d\tau\ ,\ d\varsigma=0\ \Rightarrow\ d\tau=-\frac{<\delta\vec{r},\vec{r}(\tau)>_s}{\|\vec{r}(\tau)\|_s-<\vec{v}_M(\tau),\vec{r}(\tau)>_s}$$

Sachant que

$$d\left(\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right)=<\vec{\nabla}h,\delta\vec{r}>_s+\frac{\partial h}{\partial\tau}\ d\tau$$

Il vient les formules

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right)=\frac{\|\vec{r}(\tau)\|_s}{\|\vec{r}(\tau)\|_s-<\vec{v}_M(\tau),\vec{r}(\tau)>_s}\ \frac{\partial h}{\partial\tau}\ ,\ \frac{\partial}{\partial\sigma}\ \vec{v}_M(\varsigma^{-1})=\frac{\|\vec{r}(\tau)\|_s}{\|\vec{r}(\tau)\|_s-<\vec{v}_M(\tau),\vec{r}(\tau)>_s}\ \vec{a}_M(\tau)$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right)=\vec{\nabla}h-\frac{\vec{r}(\tau)}{\|\vec{r}(\tau)\|_s-<\vec{v}_M(\tau),\vec{r}(\tau)>_s}\ \frac{\partial h}{\partial\tau}$$

L'équation 35 devient, $\dfrac{\partial f_1}{\partial \sigma}(\sigma,x,y,z) = h\left(\varsigma^{-1}(\sigma,x,y,z),x,y,z\right)$,

$$(\|\vec{r}(\tau)\|_s \vec{v}_M(\tau) - \vec{r}(\tau))\,\frac{\partial h}{\partial \tau} + (\|\vec{r}(\tau)\|_s - < \vec{v}_M(\tau), \vec{r}(\tau) >_s)\,\vec{\nabla} h + \|\vec{r}(\tau)\|_s \vec{a}_M(\tau)\; h = \vec{0} \qquad (36)$$

On sait que $\dfrac{\partial f_1}{\partial \sigma}$ et par conséquent h ne s'annule en aucun point et si f_1 décrit un mouvement de translation uniforme, alors $\dfrac{\partial f_1}{\partial \sigma}$ comme $\vec{\nabla} f_1$ est une constante par conséquent $\dfrac{\partial h}{\partial \tau}$ et $\vec{\nabla} h$ sont nulles. Le mouvement rectiligne est décrit lorsqu'il existe une fonction réelle v et un élément $\vec{e}$ de $\mathcal{V}_s$ tels que $\vec{v}_M = v\,\vec{e}$. Le mouvement de rotation uniforme est décrit par la relation, lorsque M se déplace à vitesse constante sur un cercle de centre H et de rayon ρ,

$$\vec{v}_M(\tau) = \vec{\omega} \wedge \varphi_s(H, M(\tau))\ ,\ \vec{\omega} \in \mathcal{V}_s\ ,\ < \varphi_s(H,M(\tau)), \varphi_s(H,M(\tau)) >_s = \rho^2$$

7 Mesure et orientation sur un espace vectoriel

Il est naturel de modéliser l'espace physique d'un quelconque observateur par un espace affine réel de dimension trois. Cette représentation traduit l'invariance du vide par translation et l'existence en chaque point de différentes directions. L'origine étant choisie, tout autre point est identifié par un unique vecteur. La droite passant par un point O et dirigée par $\vec{e}$ est l'ensemble des points de l'espace contenant O et tel que le vecteur défini par deux quelconques de ses éléments, que la distance qui les sépare soit infinitésimale ou arbitrairement grande, soit colinéaire à $\vec{e}$. La colinéarité et la relation de Chasles sont les opérations fondamentales de l'espace vectoriel associé. Ainsi, un espace vectoriel est une structure permettant d'effectuer des combinaisons linéaires. Enfin, pour définir les distances et l'orientation des angles sur l'espace affine, il est nécessaire de les postuler sur l'espace vectoriel.

Définition 7.1. *Un espace vectoriel réel est mesuré et orienté si, ayant choisi une de ses bases, on postule la mesure de chacun des vecteurs qui la constituent et la valeur algébrique de chacun des angles qu'ils définissent.*

Si $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel de dimension finie n, une de ses bases est $\beta = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. On pose $\{\beta\} = \{\vec{e}_i, 1 \leq i \leq n\}$. C'est par définition une famille libre et génératrice de $\mathcal{V}$. Un automorphisme de $\mathcal{V}$ est un endomorphisme qui transforme une base en une autre et il est évident que cette propriété ne dépend pas du choix de la base. En considérant la loi de composition des endomorphismes

$$\forall\ \vec{u} \in \mathcal{V}, (A \circ B)\vec{u} = A(B\vec{u})$$

il est évident que l'ensemble $GL(\mathcal{V})$ des automorphismes de $\mathcal{V}$ a une structure de groupe.

7.1 Le produit vectoriel

7.1.1 Le déterminant d'un endomorphisme

D'après sa définition, une forme n-linéaire alternée sur $\mathcal{V}$, $n \geq 2$, est une application linéaire par rapport à chacune de ses n variables, qui est nulle dès que deux des variables prennent le même vecteur comme valeur. Structurellement, une telle application permet d'identifier et de comparer les différentes bases de $\mathcal{V}$. L'ensemble $L_n(\mathcal{V})$ des formes n linéaires alternées sur $\mathcal{V}$ a

une structure d'espace vectoriel. Si f est un de ses éléments, $(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)\in\mathcal{V}^n$, $\beta=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une base de $\mathcal{V}$, on a la représentation

$$\vec{x}_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ji}\vec{e}_j\ ,\ 1\leq i\leq n\ ,(x_{ij})_{ij}\in K^{n^2}\ ,\ K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$$

La formule de Leibniz s'écrit

$$\begin{aligned}f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)&=\left(\sum_{\sigma\in\sigma_n(\{\beta\})}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}x_{\sigma(i),i}\right)f(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)\\&=\left(\sum_{\sigma\in\sigma_n(\{\beta\})}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}x_{i,\sigma(i)}\right)f(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)\end{aligned}$$

$\sigma_n(\{\beta\})$ étant le groupe symétrique sur $\{\beta\}$, $\epsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ. La double égalité vient du fait que l'application $\sigma\mapsto\sigma^{-1}$ est une bijection sur $\sigma_n(\{\beta\})$, et des égalités

$$\epsilon(\sigma)=\epsilon(\sigma^{-1})\ ,\ \{(i,\sigma(i)),1\leq i\leq n\}=\{(\sigma^{-1}(i),i),1\leq i\leq n\}$$

L'application définie sur $L_n(\mathcal{V})$ et à valeurs dans K, qui associe à f le scalaire $f(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$, est linéaire et d'après la formule de Leibniz, elle est injective et surjective. Le théorème du rang permet de déduire que $L_n(V)$ est un espace vectoriel de dimension 1. Chacun de ses éléments (non nul) peut être choisi comme base et si A est un endomorphisme de $\mathcal{V}$, son déterminant relativement à f est l'application f^A définie par

$$\forall(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)\in\mathcal{V}^n\ ,\ f^A(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)=f(A\vec{x}_1,\ldots,A\vec{x}_n)$$

f^A est élément de $L_n(\mathcal{V})$ et on a la représentation

$$f^A=\lambda_f(A)f=\lambda_{f,g}(A)g\ ,\ g\in L_n(\mathcal{V})\ ,\ g\neq 0\ ,(\lambda_f(A),\lambda_{f,g}(A))\in K^2$$

$\lambda_f(A)$ est une coordonnée privilégiée de f^A et, comme $\lambda_{f,g}(A)$, ne dépend évidemment pas de la matrice représentative de A. Des égalités triviales

$$f^{A\circ B}=(f^B)^A=(\lambda_f(B)f)^A=\lambda_f(B)f^A=\lambda_f(B)\lambda_f(A)f$$

il vient

$$\lambda_f(B\circ A)=\lambda_f(A\circ B)=\lambda_f(A)\lambda_f(B)$$

Par ailleurs, on peut poser par définition

$$A\vec{e}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\vec{e}_j\ \ ,\ \ A^*_\beta\vec{e}_i=\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}\vec{e}_j\ \ ,\ \ 1\leq i\leq n$$

Il résulte alors de la formule de Leibniz la relation

$$\lambda_f(A^*_\beta)=\overline{\lambda_f(A)}$$

Si A n'est pas un automorphisme, les vecteurs $(A\vec{e}_1,\ldots,A\vec{e}_n)$ sont linéairement dépendants par conséquent f^A est nulle. Par ailleurs, la valeur de sa coordonnée semble relative au choix du vecteur de base de $L_n(\mathcal{V})$. Si f et g sont deux éléments non nuls de $L_n(\mathcal{V})$, il existe un scalaire $\lambda(g,f)$ tel que $g=\lambda(g,f)\ f$ et on peut écrire

$$g^A=\lambda_g(A)\ g=\lambda_g(A)\lambda(g,f)\ f\ \ ,\ \ g^A=(\lambda(g,f)\ f)^A=\lambda(g,f)\ f^A=\lambda(g,f)\lambda_f(A)\ f$$

Il vient

$$\lambda_g(A)\lambda(g,f)=\lambda(g,f)\lambda_f(A)\ \ ,\ \ \lambda_g(A)=\lambda_f(A)=\lambda(A)$$

7.1.2 Le produit vectoriel

Si P est un automorphisme de $\mathcal{V}$, on peut écrire

$$\lambda(P^{-1} \circ A \circ P) = \lambda(A)$$

$\lambda(A)$ est le volume du parallélotope définit par par $(A\vec{x}_1, \ldots, A\vec{x}_n)$ relativement à celui définit par $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$, élément quelconque de $\mathcal{V}^n$. Deux bases $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ et $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ définissent le même volume orienté si l'automorphisme P, tel que $P\vec{x}_i = \vec{y}_i$, $1 \leq i \leq n$, satisfait l'égalité $\lambda(P) = 1$. On décrit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de $\mathcal{V}$ et on note $\tilde{\beta}$ la classe d'équivalence de β.

Définition 7.2. *Le déterminant du n-uplet $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ d'éléments de $\mathcal{V}$, relativement à $\tilde{\beta}$, est le nombre*

$$\det_{\tilde{\beta}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \lambda(A)$$

où A est l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ tel que $A\vec{e}_i = \vec{x}_i$, $1 \leq i \leq n$, $\beta = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

Ce déterminant représente le volume du parallélotope défini par $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ relativement à celui définit par $\tilde{\beta}$. Si $\tilde{\beta}$ est choisie comme étant la classe d'équivalence dont le volume est égal à l'unité, elle va permettre de définir le produit vectoriel de $n-1$ éléments de $\mathcal{V}$. Soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1}) \in \mathcal{V}^{n-1}$ et $<,>$ un produit scalaire sur $\mathcal{V}$. L'application f définie sur $\mathcal{V}$ par

$$\vec{x} \longmapsto \det_{\tilde{\beta}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x})$$

est une forme linéaire et d'après le théorème de représentation de Riez, il existe un élément $\vec{x}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{x}_{n-1}$ de $\mathcal{V}$ tel que

$$\forall\ \vec{x} \in \mathcal{V}\ ,\ f(\vec{x}) =< \vec{x}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{x}_{n-1}, \vec{x} >$$

$\vec{x}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{x}_{n-1}$ dépend du choix de $\tilde{\beta}$ et de $<,>$, et le caractère n-linéaire alterné de l'application définissant le déterminant permet d'établir ses propriétés. On s'intéresse au cas $n = 3$ et il vient, $\forall\ (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2$, $\forall\ \lambda \in K$,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \ \Leftrightarrow \lambda \in K,\ \vec{u} = \lambda\vec{v} \quad , \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad , \quad < \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} >=< \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} >= 0$$

Si $\gamma = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est une base de $\mathcal{V}$, $\vec{u} = u_1\vec{x}_1 + u_2\vec{x}_2 + u_3\vec{x}_3$, la formule de Leibniz donne

$$\det_{\tilde{\gamma}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3 =< \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} >$$

le produit vectoriel étant relatif au couple $(\tilde{\gamma}, <,>)$. Si γ est orthonormée relativement à $<,>$, il vient

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{x}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{x}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{x}_3$$

Cette équation permet d'établir la relation

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) =< \vec{u}, \vec{w} > \vec{v} - < \vec{u}, \vec{v} > \vec{w}$$

Un produit vectoriel sera défini relativement à une base γ de $\mathcal{V}$ et au produit scalaire $<,>_\gamma$ qui rend γ orthonormée.

7.2 Mesure sur $\mathcal{V}$

7.2.1 Mesure sur $\mathcal{V}$

$\mathcal{V}$ étant un espace vectoriel réel, un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique $<,>$ telle que

$$\forall\ \vec{u} \in \mathcal{V}, < \vec{u}, \vec{u} > \geq 0 \quad , \quad < \vec{u}, \vec{u} >= 0 \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

Si β est une base de $\mathcal{V}$, $<,>$ est entièment déterminé par les $\dfrac{n(n+1)}{2}$ nombres réels $< \vec{e}_i, \vec{e}_j >$, $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \in \{\beta\}^2$. β est orthonormée relativement à $<,>$ si, δ étant le symbole de kronecker,

$$\forall\ (\vec{e}_i, \vec{e}_j) \in \{\beta\}^2\ ,\ < \vec{e}_i, \vec{e}_j >= \delta_{ij}$$

Si A est un endomorphisme de $\mathcal{V}$, son adjoint relativement au produit scalaire $<,>$ est l'unique endomorphisme A^* tel que

$$\forall\ (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2\ ,\ < A^*\vec{u}, \vec{v} >=< \vec{u}, A\vec{v} >$$

Si β est une base orthonormée de $(\mathcal{V}, <,>)$, on constate facilement que A^* est entièrement déterminé par les nombres

$$< A^*\vec{e}_j, \vec{e}_i >=< \vec{e}_j, A\vec{e}_i >\ ,\ (\vec{e}_i, \vec{e}_j) \in \{\beta\}^2$$

On peut noter

$$A\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} < A\vec{e}_i, \vec{e}_j > \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\vec{e}_j\ ,\ A^*\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_j$$

Il apparait que dans une base orthonormée, la matrice représentive $(a_{ji})_{i,j}$ de A^* est la transposée de $(a_{ij})_{i,j}$ qui représente A. Par ailleurs, On a les égalités

$$(A^*)^* = A\ ,\ (A \circ B)^* = B^* \circ A^*$$

En effet,

$$< (A^*)^*\vec{u}, \vec{v} > = < \vec{u}, A^*\vec{v} > = < A\vec{u}, \vec{v} >$$

$$< (A \circ B)^*\vec{u}, \vec{v} > = < \vec{u}, (A \circ B)\vec{v} > = < A^*\vec{u}, B\vec{v} > = < (B^* \circ A^*)\vec{u}, \vec{v} >$$

On note $(\mathcal{O}(\mathcal{V}), <,>)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{V}$ qui satisfont la relation

$$\forall\ (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2\ ,\ < A\vec{u}, A\vec{v} >=< \vec{u}, \vec{v} >$$

Chacun de ses éléments est un automorphisme. En effet, si l'un de ses éléments A n'appartient pas à $GL(\mathcal{V})$, le théorème du rang permet d'affirmer que son noyau est de dimension supérieure ou égale à 1 et par conséquent contient un vecteur non nul $\vec{u}$. Il vient la contradiction

$$\vec{u} \neq 0\ ,\ < \vec{u}, \vec{u} >\neq 0\ ,\ A\vec{u} = \vec{0}\ ,\ < A\vec{u}, A\vec{u} >= 0$$

Proposition 7.1. *I étant l'élément neutre de $GL(\mathcal{V})$, A est élément de $(\mathcal{O}(\mathcal{V}), <,>)$ si et seulement si $A^* \circ A = A \circ A^* = I$.*

En effet, $\forall\ (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2$,

$$(< A\vec{u}, A\vec{v} >=< \vec{u}, \vec{v} >) \iff (< \vec{u}, (A^* \circ A)\vec{v} >=< \vec{u}, \vec{v} >) \iff (< \vec{u}, (A^* \circ A - I)\vec{v} >= 0)$$

Proposition 7.2. *$(\mathcal{O}(\mathcal{V}), <,>)$ est un sous groupe de $GL(\mathcal{V})$.*

En effet, si A est un de ses éléments, $A^{-1} = A^*$ et par suite

$$(A^{-1})^* \circ A^{-1} = (A^*)^* \circ A^{-1} = A \circ A^{-1} = I$$

On peut conclure que $A^{-1} \in (\mathcal{O}(\mathcal{V}), <,>)$. Si de plus $B \in (\mathcal{O}(\mathcal{V}), <,>)$,

$$(A \circ B)^* \circ (A \circ B) = (B^* \circ A^*) \circ (A \circ B) = B^* \circ (A^* \circ A) \circ B = B^* \circ B = I$$

On sait associer à toute matrice symétrique définie positive, élément de $\mathbb{R}^{n^2}$, un produit scalaire sur $\mathcal{V}$. Le théorème suivant permet d'aller plus loin.

Proposition 7.3. *Si $<,>_1$ et $<,>_2$ sont deux produits scalaires sur $\mathcal{V}$, il existe un automorphisme P tel que*

$$\forall\ (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2\ ,\ <\vec{u}, \vec{v}>_2 = <P\vec{u}, P\vec{v}>_1$$

Démonstration. Notons $\{\mathcal{B}\}$ l'ensemble des familles libres et génératrices de $\mathcal{V}$, et $\{<,>\}$ l'ensemble des produits scalaires sur $\mathcal{V}$. Soit ψ l'application définie de $\{\mathcal{B}\}$ et à valeur dans $\{<,>\}$, qui associe à $\{\beta\}$ l'unique forme bilinéaire symétrique f telle que

$$\forall\ (\vec{e}_i, \vec{e}_j) \in \{\beta\}^2\ ,\ f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$$

L'existence du procédé d'orthomalisation de Gram-Schmidt permet d'affirmer que ψ est surjective. Soient $<,>_1$ et $<,>_2$ des éléments de $\{<,>\}$, $\{\beta\}$ et $\{\beta'\}$ des éléments de $\{\mathcal{B}\}$ tels que $\psi(\{\beta\}) = <,>_1$, $\psi(\{\beta'\}) = <,>_2$. On peut noter $\{\beta\} = \{\vec{e}_i, 1 \leq i \leq n\}$, $\{\beta'\} = \{\vec{e}'_i, 1 \leq i \leq n\}$. Alors il existe $(P_{ij})_{ij}$, élément de $\mathbb{R}^{n^2}$, tel que

$$\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\vec{e}'_i \quad , \quad 1 \leq j \leq n$$

La matrice $(P_{ij})_{ij}$ transforme une base de $\mathcal{V}$ en une autre et on peut noter P l'endomorphisme (nécessairement un automorphisme) de $\mathcal{V}$ qui est tel que

$$P\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\vec{e}_i \quad , \quad 1 \leq j \leq n$$

Considérons les vecteurs

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_j\vec{e}_j \quad , \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_j\vec{e}_j$$

On peut écrire

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}u_j)\vec{e}'_i\ ,\ \vec{v} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}v_j)\vec{e}'_i\ ,\ <\vec{u}, \vec{v}>_2 = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}u_j)(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}v_j)$$

Par ailleurs,

$$P\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j P\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}u_j)\vec{e}_i\ ,\ <P\vec{u}, P\vec{v}>_1 = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}u_j)(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}v_j)$$

□

Il résulte de ce théorème que $<,>_0$ étant un produit scalaire sur $\mathcal{V}$, l'application ϕ définie sur $GL(\mathcal{V})$ et à valeurs dans $\{<,>\}$, qui associe à P l'élément $<,> = < P(.), P(.) >_0$, est surjective. L'adjoint étant définit relativement à $<,>_0$, on peut écrire, $(P,Q) \in GL(\mathcal{V})^2$,

$$(\phi(P) = \phi(Q)) \iff (< P(.), P(.) >_0 =< Q(.), Q(.) >_0) \iff (< ., (P^* \circ P)(.) >_0 =< ., (Q^* \circ Q)(.) >_0)$$

Il vient $P^* \circ P = Q^* \circ Q$. Cette injection de $GL(\mathcal{V})$ dans $\{<,>\}$ n'est pas canonique (dépend du choix de la reférence $<,>_0$ qui est l'image de l'identité).
Soient $(A,P) \in GL(\mathcal{V})^2$, $<,>_1 \in \{<,>\}$, $<,>_2 = < P(.), P(.) >_1$. On peut écrire

$$\begin{aligned} A \in (\mathcal{O}(\mathcal{V}), <,>_2) &\iff \forall\ (\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2, < A\vec{u}, A\vec{v} >_2 =< \vec{u}, \vec{v} >_2 \\ &\iff \forall\ (\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2, < (P \circ A)\vec{u}, (P \circ A)\vec{v} >_1 =< P\vec{u}, P\vec{v} >_1 \\ &\iff \forall\ (\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2, < (P \circ A \circ P^{-1})P\vec{u}, (P \circ A \circ P^{-1})P\vec{v} >_1 =< P\vec{u}, P\vec{v} >_1 \\ &\iff P \circ A \circ P^{-1} \in (\mathcal{O}(\mathcal{V}), <,>_1) \end{aligned}$$

Il résulte

$$(\mathcal{O}(\mathcal{V}), < P(.), P(.) >) = \{P^{-1} \circ A \circ P,\ A \in (\mathcal{O}(\mathcal{V}), <,>)\}$$

Proposition 7.4. *Tous les produits scalaires sur $\mathcal{V}$ définissent la même topologie.*

En effet, soit $\beta = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de $\mathcal{V}$, $<,>$ le produit scalaire qui rend β orthonormée. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j \vec{e}_j\ ,\ < P\vec{u}, P\vec{u} >= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} P_{ij} u_j)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} P_{ij}^2)(\sum_{j=1}^{n} u_j^2) = (\sum_{1 \leq i,j \leq n} P_{ij}^2) < \vec{u}, \vec{u} >$$

Définition 7.3. *L'espace vectoriel $\mathcal{V}$ est mesuré s'il est muni d'une base β. Sa mesure est le produit scalaire $<,>$ sur $\mathcal{V}$ qui rend β orthonormée.*

Si $(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2$, $< \vec{u}, \vec{u} >$ est le carré de la longueur de $\vec{u}$, et on a la formule

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \frac{1}{4}(< \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} > - < \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} >)$$

Il vient, si A est un endomorphisme de $\mathcal{V}$ tel que $< A\vec{u}, A\vec{u} > = < \vec{u}, \vec{u} >$, $\forall\ \vec{u} \in \mathcal{V}$, la relation

$$\forall\ (\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2,\ < A\vec{u}, A\vec{v} >=< \vec{u}, \vec{v} >$$

$(\mathcal{O}(\mathcal{V}), <,>)$ est l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{V}$ qui conservent la longueur des vecteurs. Par ailleurs (Fréchet-Von Neumann-Jordan), si $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{V}$, alors l'application

$$(\vec{u},\vec{v}) \longmapsto \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

est un produit scalaire.

7.2.2 $\mathcal{V}$ et $\mathbb{R}^n$

On sait que toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie définissent la même topologie. La norme canonique de $\mathbb{R}^n$ est déterminée par l'application

$$(u_1, \ldots, u_n) \longmapsto \|(u_1, \ldots, u_n)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

Si $\beta = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de $\mathcal{V}$, l'application φ_β à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et définie par

$$\varphi_\beta(\sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i) = (u_1, \ldots, u_n)$$

est une bijection linéaire. Elle est continue puisque, en notant $<,>$ le produit scalaire sur $\mathcal{V}$ qui rend β orthonormée, on peut écrire

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i \ , \ <\varphi_\beta(\vec{u}), \varphi_\beta(\vec{u})>= \|(u_1, \ldots, u_n)\|^2$$

Il résulte que $\mathcal{V}$ est homéomorphe (bijection bicontinue) à $\mathbb{R}^n$.

Proposition 7.5. *Si E_1 (resp. E_2) est un espace affine dont la direction est de dimension n (resp. m), il est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$) et il existe une bijection continue définie sur $\mathbb{R}^{n+m}$ et à valeurs dans $E_1 \times E_2$ munit de la topologie produit.*

Démonstration. Si $\mathcal{V}_1$ (resp. $\mathcal{V}_2$) est la direction de E_1 (resp. E_2), par définition, il existe un homéomorphisme φ_1 (resp. φ_2) défini sur E_1 (resp. E_2) et à valeurs dans $\mathcal{V}_1$ (resp. $\mathcal{V}_2$) : d_1 étant la distance définie sur E_1 et $<,>_1$ la mesure de $\mathcal{V}_1$, le vecteur défini par le bipoint (x, y) est $\varphi_1(y) - \varphi_1(x)$ et de plus,

$$(d_1(x, y))^2 =< \varphi_1(y) - \varphi_1(x), \varphi_1(y) - \varphi_1(x) >_1$$

Si β_1 est une base (éventuellement orthonormée) de $(\mathcal{V}_1, <,>_1)$, alors $\varphi_{\beta_1} \circ \varphi_1$ est un homéomorphisme entre E_1 et $\mathbb{R}^n$. En notant $\beta_1 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, $\beta_2 = (\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n)$, l'application $\varphi_{\beta_1,\beta_2}$ définie sur $\mathbb{R}^{m+n}$ et à valeurs dans $E_1 \times E_2$ par

$$\varphi_{\beta_1,\beta_2}(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) = (\varphi_1^{-1}(\sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i), \varphi_2^{-1}(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}'_i))$$

est une bijection continue.

7.3 Le complexifié de $\mathcal{V}$

Soit $\hat{i}$ le nombre complexe tel que $\hat{i}^2 = -1$. On peut définir les produits, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2$,

$$(x + \hat{i}y)(\vec{u} + \hat{i}\vec{v}) = (x\vec{u} - y\vec{v}) + \hat{i}(x\vec{v} + y\vec{u}) \ , \ \hat{i}(\vec{u} + \vec{v}) = \hat{i}\vec{u} + \hat{i}\vec{v} \ , \ \hat{i}\vec{0} = \vec{0}$$

Il apparait que, muni de ces opérations, $\tilde{\mathcal{V}} = \{\vec{u} + \hat{i}\vec{v}, (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2\}$ est un espace vectoriel sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Tout élément de $\mathcal{V}$ est élément de $\tilde{\mathcal{V}}$ mais $\mathcal{V}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\tilde{\mathcal{V}}$.

Proposition 7.6. *Toute base de $\mathcal{V}$ est une base de $\tilde{\mathcal{V}}$.*

Démonstration. En effet

$$\forall \ \tilde{w} \in \tilde{\mathcal{V}}, \ \exists (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2, \ \tilde{w} = \vec{u} + \hat{i}\vec{v}$$

Si $\beta = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de $\mathcal{V}$, on a la représentation

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i \ , \ \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$$

Il vient

$$\tilde{w} = (\sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i) + \hat{i}(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} (u_i + \hat{i} v_i) \vec{e}_i$$

On peut écrire

$$\tilde{w} = \tilde{0} \implies (\sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i = \vec{0}, \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i = \vec{0}) \implies u_i = v_i = 0,\ 1 \leq i \leq n$$

□

Il résulte de cette proposition que toute application linéaire définie sur $\tilde{\mathcal{V}}$ est entièrement déterminée par les images des éléments d'une base de $\mathcal{V}$. Par ailleurs, l'application définie sur $L(\mathcal{V})$ et à valeurs dans $L(\tilde{\mathcal{V}})$, qui associe à A l'élément $\tilde{A}$ déterminé par

$$\forall\ (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2\ ,\ \tilde{A}(\vec{u} + \hat{i}\vec{v}) = (A\vec{u}) + \hat{i}(A\vec{v})$$

permet de considérer $L(\mathcal{V})$ comme un sous ensemble de $L(\tilde{\mathcal{V}})$.

7.3.1 Mesure sur $\tilde{\mathcal{V}}$

Si $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathcal{V}$, il peut être prolongé sur $\tilde{\mathcal{V}}$ par la relation, $(\tilde{w}, \tilde{w}') \in \tilde{\mathcal{V}}^2$, $\tilde{w} = \vec{u} + \hat{i}\vec{v}$, $\tilde{w}' = \vec{u}' + \hat{i}\vec{v}'$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}') \in \mathcal{V}^4$,

$$< \tilde{w}, \tilde{w}' >= (< \vec{u}, \vec{u}' > + < \vec{v}, \vec{v}' >) + \hat{i}(< \vec{v}, \vec{u}' > - < \vec{u}, \vec{v}' >)$$

C'est une forme hermitienne et sesquilinéaire à droite, dont la restriction à $\mathcal{V}$ est le produit scalaire initial. On a les relations

$$\forall\ \tilde{w} \in \tilde{\mathcal{V}},\ < \tilde{w}, \tilde{w} >= 0 \Longrightarrow \tilde{w} = \tilde{0}$$

Si $\tilde{A} \in L(\tilde{\mathcal{V}})$, son adjoint relativement au produit hermitien $<,>$ est $\tilde{A}^*$ tel que

$$\forall\ (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\mathcal{V}}^2,\ < \tilde{A}\tilde{u}, \tilde{v} >=< \tilde{u}, \tilde{A}^*\tilde{v} >$$

Si $\tilde{\beta}$ est une base orthonormée relativement à $<,>$, il vient

$$\tilde{A}\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\tilde{e}_j\ ,\ < \tilde{A}\tilde{e}_i, \tilde{e}_j >= a_{ji} =< \tilde{e}_i, \tilde{A}^*\tilde{e}_j >= \overline{< \tilde{A}^*\tilde{e}_j, \tilde{e}_i >}\ ,\ < \tilde{A}^*\tilde{e}_i, \tilde{e}_j >= \bar{a}_{ij}\ ,\ \tilde{A}^*\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}\tilde{e}_j$$

On a les égalités $(\tilde{A}^*)^* = \tilde{A}$, $(\tilde{A} \circ \tilde{B})^* = \tilde{B}^* \circ \tilde{A}^*$. $(\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{V}}), <, >)$ est l'ensemble des éléments de $L(\tilde{\mathcal{V}})$ qui satisfont la relation

$$\forall\ (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\mathcal{V}}^2,\ < \tilde{A}\tilde{u}, \tilde{A}\tilde{v} >=< \tilde{u}, \tilde{v} >$$

C'est un sous groupe de $GL(\tilde{\mathcal{V}})$ caractérisé par les égalités $\tilde{A}^* \circ \tilde{A} = \tilde{A} \circ \tilde{A}^* = \tilde{I}$. On vérifie facilement que $\tilde{A} \in (\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{V}}), <, >)$ si et seulement si $\tilde{A}$ transforme une base orthonormée en une autre par conséquent, à travers l'application qui identifie $L(\mathcal{V})$ à un sous ensemble de $L(\tilde{\mathcal{V}})$, $GL(\mathcal{V})$ peut être considéré comme un sous ensemble de $GL(\tilde{\mathcal{V}})$ et $(\mathcal{O}(\mathcal{V}), <, >)$ comme un sous ensemble de $(\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{V}}), <, >)$.

7.3.2 Endomorphismes remarquables

Proposition 7.7. *(Schur)*
Si $\tilde{A} \in L(\tilde{\mathcal{V}})$, il existe une base $\tilde{\beta}_{\tilde{A}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ de $\tilde{\mathcal{V}}$ dans laquelle la matrice représentative de $\tilde{A}$ est triangulaire :

$$\tilde{A}\tilde{e}_j = \sum_{i \leq j} \lambda_{ij} \tilde{e}_i \ , \ \lambda_{ij} \in \mathbb{C}$$

Démonstration. D'après la formule de Leibniz, l'application définie sur $\mathbb{C}$ par la relation

$$\lambda \longmapsto \det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I})$$

est un polynôme de degré n. Il admet au moins une racine complexe λ_1 et on a la relation

$$\forall \ \tilde{u} \in \ker(\tilde{A} - \lambda_1 \tilde{I}) \ , \ \tilde{A}\tilde{u} = \lambda_1 \tilde{u}$$

Soit $\tilde{e}_1$ un vecteur non nul de $\ker(\tilde{A} - \lambda_1 \tilde{I})$, et $Vec(\tilde{e}_1)$ le sous espace vectoriel qu'il engendre. On peut noter $\tilde{\mathcal{V}}_{-\{\tilde{e}_1\}}$ un supplémentaire de $Vec(\tilde{e}_1)$ dans $\tilde{\mathcal{V}}$, et $P_{-\{\tilde{e}_1\}}$ l'application définie par la relation

$$\forall \ (\tilde{u}, \tilde{v}) \in Vec(\tilde{e}_1) \times \tilde{\mathcal{V}}_{-\{\tilde{e}_1\}} \ , \ P_{-\{\tilde{e}_1\}}(\tilde{u} + \tilde{v}) = \tilde{v}$$

$P_{-\{\tilde{e}_1\}} \circ \tilde{A}$ est élément de $L(\tilde{\mathcal{V}}_{-\{\tilde{e}_1\}})$ et on peut lui appliquer le procédé qui précède si la dimension de $\tilde{\mathcal{V}}_{-\{\tilde{e}_1\}}$ est supérieure ou égale à deux. Ainsi, si $1 < k < n-1$, il existe $\tilde{e}_{k+1}$ élément de $\tilde{\mathcal{V}}_{-\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k\}}$, tel que

$$(P_{-\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k\}} \circ \tilde{A})\tilde{e}_{k+1} = \lambda_{k+1}\tilde{e}_{k+1} \ , \ \tilde{A}\tilde{e}_{k+1} = \lambda_{k+1}\tilde{e}_{k+1} + \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_{i,k+1}\tilde{e}_i$$

□

Proposition 7.8. *Si $\tilde{F}$ est un sous espace vectoriel de $\tilde{\mathcal{V}}$ qui est stable par $\tilde{A}$, $\tilde{A} \in GL(\tilde{\mathcal{V}})$, alors $\tilde{F}$ est stable par $\tilde{A}^{-1}$.*

Démonstration. En effet, le sous espace vectoriel image de $\tilde{F}$ par $\tilde{A}$ est égal à $\tilde{F}$. □

Lorsqu'il n'ya pas de précision, on fait le choix d'une forme hermitienne $<,>$ sur $\tilde{\mathcal{V}}$.

Proposition 7.9. *Si $\tilde{A} \in L(\tilde{\mathcal{V}})$ (resp. $GL(\tilde{\mathcal{V}})$), $\tilde{F}$ un sous espace vectoriel de $\tilde{\mathcal{V}}$ stable par $\tilde{A}$, et s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{A}^* = \lambda \tilde{A}$ (resp. $\lambda \tilde{A}^{-1}$), alors*

$$\tilde{F}^{\perp} = \{\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}, \forall \ \tilde{u} \in \tilde{F}, < \tilde{u}, \tilde{v} >= 0\}$$

est stable par $\tilde{A}$.

Démonstration. En effet, $\forall \ \tilde{v} \in \tilde{F}^{\perp}$, $\forall \ \tilde{u} \in \tilde{F}$, $< A\tilde{u}, \tilde{v} > = < \tilde{u}, \tilde{A}^*\tilde{v} > = 0$. On peut conclure que $\tilde{F}^{\perp}$ est stable par $\tilde{A}^*$. Si $\tilde{A}^* = \lambda \tilde{A}$, alors $\tilde{F}^{\perp}$ est stable par $\tilde{A}$ et si $\tilde{A}^* = \lambda \tilde{A}^{-1}$, alors $\tilde{F}^{\perp}$ est stable par $\tilde{A}^{-1}$. Dans cette dernière situation, on peut déduire de la proposition précédente que $\tilde{F}^{\perp}$ est stable par $\tilde{A}$. □

Proposition 7.10. *Si $\tilde{A} \in L(\tilde{\mathcal{V}})$ (resp. $GL(\tilde{\mathcal{V}})$), et s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{A}^* = \lambda \tilde{A}$ (resp. $\lambda \tilde{A}^{-1}$), alors il existe une base orthonormale de $\tilde{\mathcal{V}}$ dont les éléments sont les vecteurs propres de $\tilde{A}$.*

Démonstration. En effet, soit $\tilde{e}_1$ un vecteur propre de $\tilde{A}$, et $Vec(\tilde{e}_1)^\perp$ l'orthogonal de la droite vectoriel qu'il engendre. Puisque $Vec(\tilde{e}_1)$ est stable par $\tilde{A}$, $Vec(\tilde{e}_1)^\perp$ l'est également et la restriction de $\tilde{A}$ à $Vec(\tilde{e}_1)^\perp$ est un endomorphisme qui admet au moins un vecteur propre $\tilde{e}_2$. On construit ainsi n vecteurs propres orthogonaux entre eux. □

Proposition 7.11. *Soit $A \in L(\mathcal{V})$ et $\tilde{A}$ son prolongement à $L(\tilde{\mathcal{V}})$. Si $(\vec{u}+\hat{i}\vec{v})$, $(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2$, est un vecteur propre de $\tilde{A}$ et λ la valeur propre associée, alors $(\vec{v}+\hat{i}\vec{u})$ est un vecteur propre de $\tilde{A}$ associé à la valeur propre $\bar{\lambda}$. De plus, le plan vectoriel réel de $\mathcal{V}$ engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est stable par A.*

Démonstration. En effet, si $\lambda = a+\hat{i}b$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on peut écrire

$$\tilde{A}(\vec{u}+\hat{i}\vec{v}) = (a+\hat{i}b)(\vec{u}+\hat{i}\vec{v}) \ , \ (A\vec{u})+\hat{i}(A\vec{v}) = (a\vec{u}-b\vec{v})+\hat{i}(b\vec{u}+a\vec{v}) \ , \ A\vec{u} = a\vec{u}-b\vec{v} \ , \ A\vec{v} = b\vec{u}+a\vec{v}$$

De plus, $\tilde{A}(\vec{v}+\hat{i}\vec{u}) = (A\vec{v})+\hat{i}(A\vec{u}) = (a-\hat{i}b)(\vec{v}+\hat{i}\vec{u})$. Si λ est réel ($b=0$), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs propres de A associés à la même valeur propre. Sinon, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne peuvent être colinéaires et engendrent un plan vectoriel réel stable par A. On remarque que dans cette dernière situation, ils forment une base du plan vectoriel de $\tilde{\mathcal{V}}$ engendré par $\vec{u}+\hat{i}\vec{v}$ et $\vec{v}+\hat{i}\vec{u}$ puisqu'on peut écrire

$$\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{u}+\hat{i}\vec{v}) - \frac{\hat{i}}{2}(\vec{v}+\hat{i}\vec{u}) \quad , \quad \vec{v} = -\frac{\hat{i}}{2}(\vec{u}+\hat{i}\vec{v}) + \frac{1}{2}(\vec{v}+\hat{i}\vec{u})$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et de même norme si et seulement si $\vec{u}+\hat{i}\vec{v}$ et $\vec{v}+\hat{i}\vec{u}$ sont orthogonaux.

Proposition 7.12. *Soit A un endomorphisme de $\mathcal{V}$ tel que son prolongement $\tilde{A}$ soit diagonalisable sur $\tilde{\mathcal{V}}$. Alors il existe k plans vectoriels réels $F_1,\dots,F_k$, et $n-2k$ droites vectorielles réelles $F_{2k+1},\dots,F_n$, tels que*

$$\mathcal{V} = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k \oplus F_{2k+1} \oplus \cdots \oplus F_n$$

Démonstration. Posons $sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{R},\ \det(A-\lambda I) = 0\}$. On peut noter $\{\vec{e}_\lambda\}$ un ensemble de vecteurs formant une base de $\ker(A-\lambda I)$, $\lambda \in sp(A)$. Si $sp(A)$ n'est pas vide, la réunion des ensembles $\{\vec{e}_\lambda\}$ lorsque λ le parcours peut être notée $\{\vec{e}_i, 1 \le i \le l \le n\}$. On note F_i (resp. $\tilde{F}_i$), $1 \le i \le l$, la droite vectorielle de $\mathcal{V}$ (resp. $\tilde{\mathcal{V}}$) engendrée par $\vec{e}_i$. Si un élément de $\tilde{\mathcal{V}}$ est un vecteur propre de $\tilde{A}$ associé à une valeur propre réelle, il est nécessairement de la forme $\vec{u}+\hat{i}\vec{v}$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs propres de A associés à cette même valeur propre. $\tilde{A}$ étant diagonalisable, l'écriture de $\tilde{\mathcal{V}}$ comme somme direct de ses sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est unique (lemme des noyaux). Ainsi, il existe $n-l$ droites vectorielles $\tilde{F}_i$, $l+1 \le i \le n$, stables par $\tilde{A}$ et associées à des valeurs propres non réelles, telles que $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{F}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{F}_n$. De plus, si $\vec{u}+\hat{i}\vec{v}$ est un élément non nul de $\tilde{F}_i$, $l+1 \le i \le n$, alors $\vec{u} \neq \vec{v} \neq 0$ (car $\tilde{A}$ prolonge A), et on peut redéfinir la famille $\{\tilde{F}_j, l+1 \le j \le n, i \neq j\}$ de sorte que $\vec{v}+\hat{i}\vec{u}$ qui est un vecteur propre de $\tilde{A}$ associé à une valeur propre différente de celle de $\vec{u}+\hat{i}\vec{v}$, soit élément de $\tilde{F}_{j(i)}$, $l+1 \le j(i) \le n$. On sait alors que $\{\vec{u}_i,\vec{v}_i\}$ est une base de $\tilde{F}_i \oplus \tilde{F}_{j(i)}$, et que le plan vectoriel réel qu'il engendre est stable par A. Enfin, si $(\vec{u}_i+\hat{i}\vec{v}_i)_{1\le i\le r}$ est une famille d'éléments linéairement indépendants de $\tilde{\mathcal{V}}$ (il peut s'agir des vecteurs propres de $\tilde{A}$ associés à une unique valeur propre), ils sont orthogonaux entre eux relativement à un certain produit hermitien $<,>$. Nécessairement, les vecteurs $(\vec{v}_i+\hat{i}\vec{u}_i)_{1\le i\le r}$ sont orthogonaux entre eux par rapport à $<,>$ et sont par conséquent linéairement indépendants. □

Il résulte de cette proposition que, si $\tilde{A}$ est diagonalisable et n'admet aucune valeur propre réelle non nulle, le sous espace vectoriel réel image de $\mathcal{V}$ par A s'écrit comme la somme direct k plans stables par A. Ces plans sont caractéristiques de l'endomorphisme : si $\vec{u}$ n'appartient pas à son noyau, le plans vectoriel stable le contenant admet pour base $\{\vec{u}, A\vec{u}\}$.

Proposition 7.13. *Si des vecteurs propres d'un endomorphisme $\tilde{A}$ de $\tilde{\mathcal{V}}$ forment une base orthonormée, ce sont des vecteurs propres de $\tilde{A}^*$ et les valeurs propres associées pour $\tilde{A}^*$ sont les conjuguées de celles associées pour $\tilde{A}$.*

Démonstration. En effet, soit $\tilde{\beta} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ la base considérée et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\tilde{A}\tilde{e}_i = \lambda_i \tilde{e}_i$, $1 \leq i \leq n$. On peut écrire

$$< \tilde{A}\tilde{e}_i, \tilde{e}_j > = < \lambda_i \tilde{e}_i, \tilde{e}_j > = \lambda_i < \tilde{e}_i, \tilde{e}_j > = \lambda_i \delta_{ij}$$

Il vient

$$< \tilde{A}^*\tilde{e}_i, \tilde{e}_j > = < \tilde{e}_i, \tilde{A}\tilde{e}_j > = < \tilde{e}_i, \lambda_j \tilde{e}_j > = \bar{\lambda}_j < \tilde{e}_i, \tilde{e}_j > = \bar{\lambda}_j \delta_{ij}$$

□

On peut établir les relations, A étant un endomorphisme de $\mathcal{V}$ et $\tilde{A}$ son prolongement à $\tilde{\mathcal{V}}$,

$$(\tilde{A})^* = \widetilde{(A^*)} \quad , \quad (\tilde{A})^{-1} = \widetilde{(A^{-1})}$$

Il est alors possible d'énoncer :

Proposition 7.14. *Soit $A \in L(\mathcal{V})$ et $\tilde{A}$ son prolongement dans $L(\tilde{\mathcal{V}})$. Alors $A^* = A$ si et seulement si $\tilde{A}$ est diagonalisable dans une base orthonormale de $\tilde{\mathcal{V}}$ et ses valeurs propres sont des nombres réels. $A^* = A^{-1}$ si et seulement si $\tilde{A}$ est diagonalisable dans une base orthonormale de $\tilde{\mathcal{V}}$ et ses valeurs propres sont des nombres complexes de module égal à 1. $A^* = -A$ si et seulement si $\tilde{A}$ est diagonalisable dans une base orthonormale de $\tilde{\mathcal{V}}$ et ses valeurs propres sont nombres imaginaires purs (éventuellement nuls). Par définition, une symétrie sur $\mathcal{V}$ est un automorphisme A tel que $A^* = A^{-1} = A$.*

7.4 Orientation sur $\mathcal{V}$

Il est sensé d'orienter un quelconque plan de l'espace physique dans le sens ou dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. L'origine O de l'espace affine étant choisie, tout élément $\vec{u}$ de l'espace vectoriel associé est identifié par un point $M = M(\vec{u})$. Par définition, le déplacement de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ est le parcours, lorsqu'on fait choix d'un cercle centré en O, de l'arc de cercle de longueur minimale issue de $M(\vec{u})$ et reliant $(O, M(\vec{u}))$ à $(O, M(\vec{v}))$. L'orientation d'un espace vectoriel réel $\mathcal{V}$ sera donnée par une forme bilinéaire alternée f : si $f(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, le signe du déplacement de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ est $\dfrac{f(\vec{u}, \vec{v})}{|f(\vec{u}, \vec{v})|}$. On sait qu'une telle application est suffisante pour l'orientation d'un quelconque plan vectoriel. Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base du plan considéré, f est entièrement déterminée par le scalaire $f(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ qui est soit positif, soit négatif, sa valeur absolue ne modifiant pas l'orientation définie par f. On a la formule

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 \ , \ \vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 \ , \ f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{e}_1, \vec{e}_2)(u_1v_2 - u_2v_1) = f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} (\vec{u}, \vec{v})$$

On peut affirmer, par définition, que $(\vec{u}, \vec{v})$ à la même orientation que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ si on a la relation

$$\det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} (\vec{u}, \vec{v}) > 0$$

Notons qu'il existe deux définitions non équivalentes de l'angle orienté entre deux éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un plan vectoriel mesuré :
* C'est l'unique $\theta \in [0, 2\pi[$ qui est tel qu'il existe un endomorphisme A_θ satisfaisant les équations

$$A_\theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \ , \ A_\theta\vec{e}_1 = \cos\theta \ \vec{e}_1 + \sin\theta \ \vec{e}_2 \ , \ A_\theta\vec{e}_2 = -\sin\theta \ \vec{e}_1 + \cos\theta \ \vec{e}_2$$

* C'est l'unique $\alpha \in [0, 2\pi[$ qui est tel qu'il existe un endomorphisme A_α satisfaisant les équations

$$A_\alpha \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \ , \ A_\alpha \vec{e}_1 = \cos\alpha \ \vec{e}_1 - \sin\alpha \ \vec{e}_2 \ , \ A_\alpha \vec{e}_2 = \sin\alpha \ \vec{e}_1 + \cos\alpha \ \vec{e}_2$$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant une base orthonormée du plan vectoriel considéré, on a les relations

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \ , \ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 \ , \ \cos\theta = \cos\alpha = xx' + yy' \ , \ \sin\theta = -\sin\alpha = xy' - yx'$$

Il vient

$$\alpha = \theta + \pi \ \text{ si } \ \theta \in [0, \pi[\ \ , \ \ \alpha = \theta - \pi \ \text{ si } \ \theta \in [\pi, 2\pi[$$

Proposition 7.15. *Toute forme bilinéaire alternée f sur $\mathcal{V}$ est continue.*

Démonstration. $\beta = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ étant une base de $\mathcal{V}$, on pose

$$M = \sup_{1 \leq i < j \leq n} |f(\vec{e}_1, \vec{e}_2)| \ \ , \ \ \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i \ , \ \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i \ , \ (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2$$

L'identité de Lagrange s'écrit, $<,>$ étant le produit scalaire qui rend β orthonormée,

$$< \vec{u}, \vec{v} >^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (u_i v_j - u_j v_i)^2 = < \vec{u}, \vec{u} >< \vec{v}, \vec{v} >$$

Il vient, d'après l'inégalité de Cauchy-Shwarz,

$$|f(\vec{u}, \vec{v})| = | \sum_{1 \leq i < j \leq n} (u_i v_j - u_j v_i) f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) | \leq M \sum_{1 \leq i < j \leq n} |u_i v_j - u_j v_i| \leq M\alpha \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} (u_i v_j - u_j v_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|f(\vec{u}, \vec{v})| \leq M\alpha \sqrt{< \vec{u}, \vec{u} >< \vec{v}, \vec{v} > - < \vec{u}, \vec{v} >^2} \leq M\alpha \sqrt{< \vec{u}, \vec{u} >< \vec{v}, \vec{v} >} \ , \ \alpha = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Il est possible d'identifier l'ensemble $L_2(\mathcal{V})$ des formes bilinéaires alternées sur $\mathcal{V}$ à une classe particulière d'endomorphismes. En effet, faisons le choix de $<,>$ sur $\mathcal{V}$. D'après le théorème de représentation de Riez, f étant bilnéaire, il existe un endomorphisme s tel que

$$\forall \ (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2, f(\vec{u}, \vec{v}) = < s\vec{u}, \vec{v} >$$

Il vient

$$(f(\vec{v}, \vec{u}) = -f(\vec{u}, \vec{v})) \iff (< s\vec{v}, \vec{u} >= - < s\vec{u}, \vec{v} >) \iff (< s^*\vec{u}, \vec{v} >=< -s\vec{u}, \vec{v} >) \ , \ s^* = -s$$

On peut écrire

$$(P^*)^{-1} \circ P^* = I \ , \ (P^{-1})^* \circ P^* = (P \circ P^{-1})^* = I^* = I \ , \ (P^{-1})^* = (P^*)^{-1}$$

Il vient

$$< s\vec{u}, \vec{v} >=< P^* \circ (P^*)^{-1} \circ s \ \vec{u}, \vec{v} >=< (P^*)^{-1} \circ s \ \vec{u}, P\vec{v} >=< P \circ (P^{-1} \circ (P^*)^{-1}) \circ s \ \vec{u}, P\vec{v} > \ , \ P \in GL(\mathcal{V})$$

Il apparait que l'endomorphisme qui représente f relativement à $< P^{-1}(.), P^{-1}(.) >$ est $(P \circ P^*) \circ s$. Il a même rang (car même noyau) que s et il est possible de définir le rang d'une

forme bilinéaire alternée comme étant celui de l'endomorphisme associé. On peut remarquer que l'adjoint de $(P \circ P^*) \circ s$ relativement au produit scalaire $< P^{-1}(.), P^{-1}(.) >$ est

$$(P \circ P^*) \circ ((P \circ P^*) \circ s)^* \circ ((P^{-1})^* \circ P^{-1}) = (P \circ P^*) \circ s^*$$

Lorsque n est impair, il n'existe pas d'endomorphisme antisymétrique s (associé à une forme bilinéaire alternée) inversible sur $\mathcal{V}$. En effet, son polynôme caractéristique, qui est de degré impair, s'annule nécessairement et on sait que toute valeur propre réelle de s est nulle. En particulier, le rang de s est pair car sa restriction à son image (qui est stable puisque s est diagonalisable sur $\tilde{\mathcal{V}}$) est un endomorphisme antisymétrique et inversible.

Proposition 7.16. *Si n est impair, toute forme bilinéaire alternée sur $\mathcal{V}$ est entièrement déterminée par sa restriction à un hyperplan convenablement choisi.*

Démonstration. En effet, si s est l'endomorphisme associé à la forme bilinéaire considérée, $\ker(s)$ son noyau et $\mathcal{V} \ominus \ker(s)$ un supplémentaire de $\ker(s)$ dans $\mathcal{V}$, ce dernier est contenu dans un hyperplan et on peut écrire

$$\forall\ \vec{u} \in \mathcal{V}\ ,\ \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2\ ,\ \vec{u}_1 \in \ker(s)\ ,\ \vec{u}_2 \in \mathcal{V} \ominus \ker(s)$$

Il vient, $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2$,

$f(\vec{u}, \vec{v}) =< s\vec{u}, \vec{v} >=< s(\vec{u}_1+\vec{u}_2), \vec{v}_1+\vec{v}_2 >=< s\vec{u}_1, \vec{v}_1 > + < s\vec{u}_1, \vec{v}_2 > + < s\vec{u}_2, \vec{v}_1 > + < s\vec{u}_2, \vec{v}_2 >$

Il vient $f(\vec{u}, \vec{v}) = < s\vec{u}_2, \vec{v}_2 > + < s\vec{u}_2, \vec{v}_1 >$. En considérant la relation

$$< s\vec{u}_2, \vec{v}_1 >=< \vec{u}_2, s^*\vec{v}_1 >=< \vec{u}_2, -s\vec{v}_1 >=< \vec{u}_2, \vec{0} >= 0$$

Il vient, $\forall\ (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2$, $f(\vec{u}, \vec{v}) = < s\vec{u}_2, \vec{v}_2 >$ □

Proposition 7.17. *On suppose n pair. Soit s un automorphisme représentant une forme bilinéaire alternée f relativement à un produit scalaire $<,>$ sur $\mathcal{V}$. Alors les plans vectoriels stables par s, dont la somme directe est égale à $\mathcal{V}$, sont caractéristiques de f, indépendamment du couple $(s, <,>)$.*

Démonstration. $\tilde{s}$ est diagonalisable dans une base orthonormée $\tilde{\beta}$ de $\tilde{\mathcal{V}}$ qui peut s'écrire comme somme directe de droites vectorielles stables et orthogonales entre elles. $\tilde{\mathcal{V}}$ peut alors s'écrire comme somme directe de sous espaces propres de $\tilde{s}$ associés à des valeurs propres différentes et orthogonaux entre eux. On peut construire une nouvelle base orthonormée $\tilde{\beta}'$ de $\tilde{\mathcal{V}}$ ainsi : on sélectionne un vecteur propre $\vec{u}_i+\hat{i}\vec{v}_i$ de $\tilde{s}$ et le vecteur $\vec{v}_i+\hat{i}\vec{u}_i$ qui est également un vecteur propre associé à une valeur propre différente. L'élément suivant est choisit dans l'orthogonal du sous espace engendré par les vecteurs déjà sélectionnés, la restriction de $\tilde{s}$ à cet orthogonal étant un endomorphisme de même nature. Un couple d'éléments de $\tilde{\beta}'$ qui est de la forme $\{\vec{u}_i+\hat{i}\vec{v}_i, \vec{v}_i+\hat{i}\vec{u}_i\}$ engendre le même plan vectoriel de $\tilde{\mathcal{V}}$ que $\{\vec{u}_i, \vec{v}_i\}$, et les plans vectoriels réels F_i, $1 \leq i \leq \dfrac{n}{2}$, engendrés par ces derniers, sont orthogonaux entre eux et stables par s. Il vient

$$\forall \vec{u} \in F_i\ ,\ \forall \vec{v} \in F_j\ ,\ 1 \leq i < j \leq \frac{n}{2}, f(\vec{u}, \vec{v})\ = < s\vec{u}, \vec{v} > =\ 0$$

Soient $\vec{e}_{i_1}$ et $\vec{e}_{i_2}$ une base de F_i. On peut écrire

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2\ ,\ f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(u_{i_1}\vec{e}_{i_1}+u_{i_2}\vec{e}_{i_2}), \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(v_{i_1}\vec{e}_{i_1}+v_{i_2}\vec{e}_{i_2})) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2})(u_{i_1}v_{i_2}-u_{i_2}v_{i_1})$$

Il apparait que f est déterminée par $\dfrac{n}{2}$ scalaires $f(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2})$, $1 \leq i < j \leq \dfrac{n}{2}$, qui sont tous non nuls sinon la restriction de f (et de s) à F_i serait nulle et s ne pourrait être inversible. □

Si n est impair et si f est une forme bilinéaire alternée telle que le noyau de l'endomorphisme associé s soit une droite vectorielle, alors les plans vectoriels caractéristiques de f sont ceux qui sont stables par s et dont la somme directe est le sous espace vectoriel image de $\mathcal{V}$ par s.

Définition 7.4. *Une orientation de l'espace vectoriel réel $\mathcal{V}$, relativement à une base $\beta = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, est une forme bilinéaire alternée de rang maximal dont les plans caractéristiques sont engendrés par les couples*

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \ , \ \{\vec{e}_3, \vec{e}_4\} \ , \ \ldots$$

Deux orientations f et g relatives à β sont équivalentes si et seulement si $f \times g \geq 0$.

Puisqu'il suffit d'affecter des signes différents à la restriction de f aux plans caractéristiques pour construire de nouvelles orientations de $\mathcal{V}$ (relatives à β), on peut affirmer qu'il existe $2^{\frac{n}{2}}$ orientations si n est pair, et $2^{\frac{n-1}{2}}$ si n est impair.

Définition 7.5. *Un espace vectoriel réel est mesuré et orienté s'il est muni d'une base β. Sa mesure est le produit scalaire qui rend β orthonormée et son orientation est définie relativement à β.*